

# Programmation par Contraintes

Module du Master "Systèmes Informatiques Intelligents" 2ème année

## CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Mr ISLI

Département d'Informatique

Faculté d'Electronique et d'Informatique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

BP 32, El-Alia, Bab Ezzouar

DZ-16111 ALGER

[http://perso.usthb.dz/~aisli/TA\\_PpC.htm](http://perso.usthb.dz/~aisli/TA_PpC.htm)

[aisli@usthb.dz](mailto:aisli@usthb.dz)

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

### Contrainte

- Une contrainte est une relation sur un nombre fini de variables (inconnues)
- Une variable admet un domaine (d'instanciation) : l'ensemble où elle prend ses valeurs
- Une contrainte restreint les valeurs que peuvent prendre simultanément les variables qu'elle relie

$R(X_1, \dots, X_k)$ , R relation k-aire

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

### Problème de satisfaction de contraintes

- **CSP** : Constraint Satisfaction Problem
- Triplet  $P=(X,D,C)$  :
  - X est l'ensemble des variables :
    - X fini
    - $X=\{X_1, \dots, X_n\}$
  - D est l'ensemble des domaines des variables :
    - $D=\{D(X_1), \dots, D(X_n)\}$
  - C est l'ensemble des contraintes sur les variables :
    - C fini
    - $C=\{c_1, \dots, c_m\}$

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

### Définition d'une contrainte

- Définition en extension :
  - une contrainte k-aire sur  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$  définie en extension énumère tous les k-uplets permis de l'ensemble  $D(X_{i_1}) \times \dots \times D(X_{i_k})$
- Définition en compréhension :
  - une contrainte k-aire sur  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$  définie en compréhension est donnée mathématiquement, par exemple sous forme d'équation ou d'inégalité linéaire sur ces k variables

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

### Instanciation d'un CSP

- Soit  $P=(X,D,C)$  un CSP
- Une instanciation (complète) est un élément du produit cartésien  $D(X_1) \times \dots \times D(X_n)$ 
  - une instanciation associe à chacune des variables du CSP un élément de son domaine, le  $i^{\text{ème}}$  élément étant la valeur associée à la variable  $X_i$
- Instanciation partielle

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

### Solution d'un CSP

- Soit  $P=(X,D,C)$  un CSP
- Une solution est une instantiation satisfaisant chacune des contraintes du CSP
  - pour chacune des contraintes, si on remplace chacune des variables sur lesquelles elle porte par la valeur que lui affecte l'instanciation, ladite contrainte s'évalue à vrai
- Une instantiation est donc une solution potentielle : instantiation devenant solution si elle satisfait toutes les contraintes

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

### Instanciation partielle d'un CSP

- Soit  $P=(X,D,C)$  un CSP
- Une instanciation partielle est un élément du produit cartésien  $D(X_{i_1}) \times \dots \times D(X_{i_k})$ , avec  $k \leq n$  et  $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\} \subseteq X$
- L'instanciation partielle est solution partielle si elle satisfait chacune des contraintes portant exclusivement sur des variables de  $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\}$

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

### Espace de recherche d'un CSP

- Soit  $P=(X,D,C)$  un CSP
- L'espace de recherche de  $P$  est l'ensemble de toutes ses instanciations (complètes), c'est-à-dire le produit cartésien  $D(X_1) \times \dots \times D(X_n)$

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

### Exemple : le problème de coloriage d'un graphe

- Instance :
  - Un graphe et une fonction  $cl$  associant à chaque nœud un ensemble de couleurs permises
- Question :
  - Peut-on colorier les nœuds du graphe, chacun avec une couleur de l'ensemble que lui associe la fonction  $cl$ , de telle sorte que deux nœuds adjacents (i.e., reliés par une arête) n'aient pas la même couleur ?

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

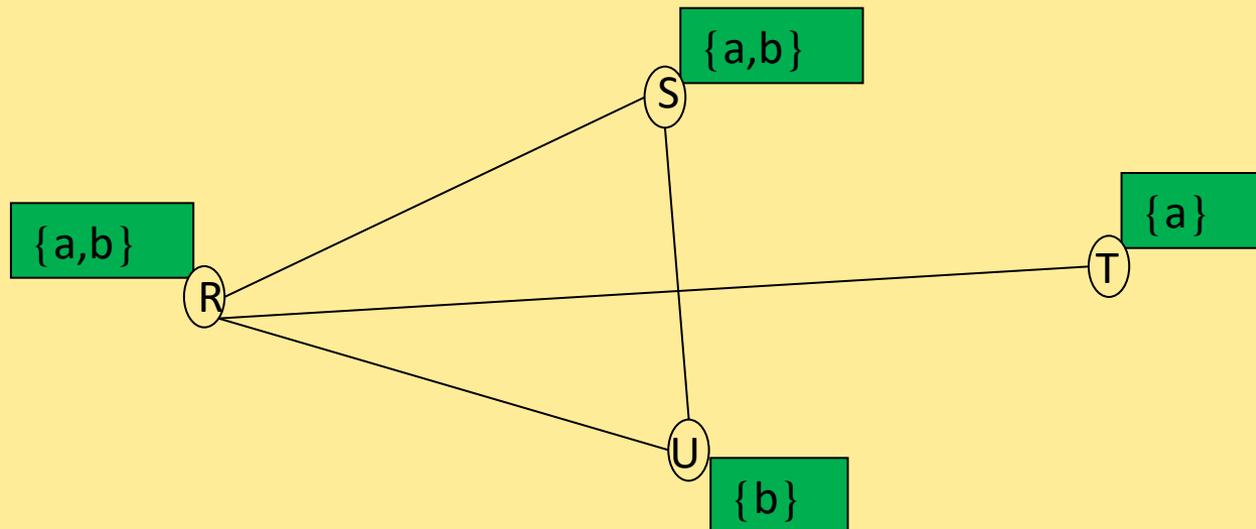
### Exemple : le problème de coloriage d'un graphe

- Le graphe peut être vu comme une représentation graphique d'une carte géographique à colorier :
  - Les nœuds du graphe sont les différents pays de la carte
  - Les couleurs associées à un nœud sont celles avec lesquelles le pays correspondant peut être colorié (drapeau)
  - Deux nœuds sont adjacents si et seulement si les pays correspondants sont limitrophes (voisins) l'un de l'autre

# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Exemple : une instance du problème de coloriage d'un graphe



# CHAPITRE I

## Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

### Exemple : modélisation de l'instance avec un CSP

- CSP  $P=(X,D,C)$  avec :
  - $X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$
  - $D(X_1)=D(X_2)=\{a,b\}$  ;  $D(X_3)=\{a\}$  ;  $D(X_4)=\{b\}$
  - $C=\{X_1\neq X_2, X_1\neq X_3, X_1\neq X_4, X_2\neq X_4\}$
- Le CSP admet quatre instanciations possibles, qui sont tous les éléments du produit cartésien des domaines
  - $(a,a,a,b)$ ,  $(a,b,a,b)$ ,  $(b,a,a,b)$ ,  $(b,b,a,b)$
- Le CSP n'admet néanmoins aucune solution