

Fusion de données : Vision crédibiliste de la fusion

*Approche
crédibiliste*

*« Ce que les hommes veulent en fait, ce n'est
pas la connaissance, c'est la certitude. »*

Bertrand Russel

Quelques repères

- Théorie de de l'évidence introduite par Shafer (1976) suite aux travaux de Dempster.
- Extension de la théorie des probabilités subjectives
- Ne concerne que les ensembles de définition discrets*.
- Deux niveaux : crédal et pignistique (Smets)

Introduction

Quelques repères

- *Upper and Lower Probabilities* (Dempster, 67)
- « *A mathematical theory of Evidence* » (Shafer, 76)
- *Hint theory* (Kholas & Monney, 90)
- *The Transferable Belief Model* - Modèle des Croyances Transférables (Smets, 94)



Shafer, 76
 Appriou, 91
 Dencœux, 95...

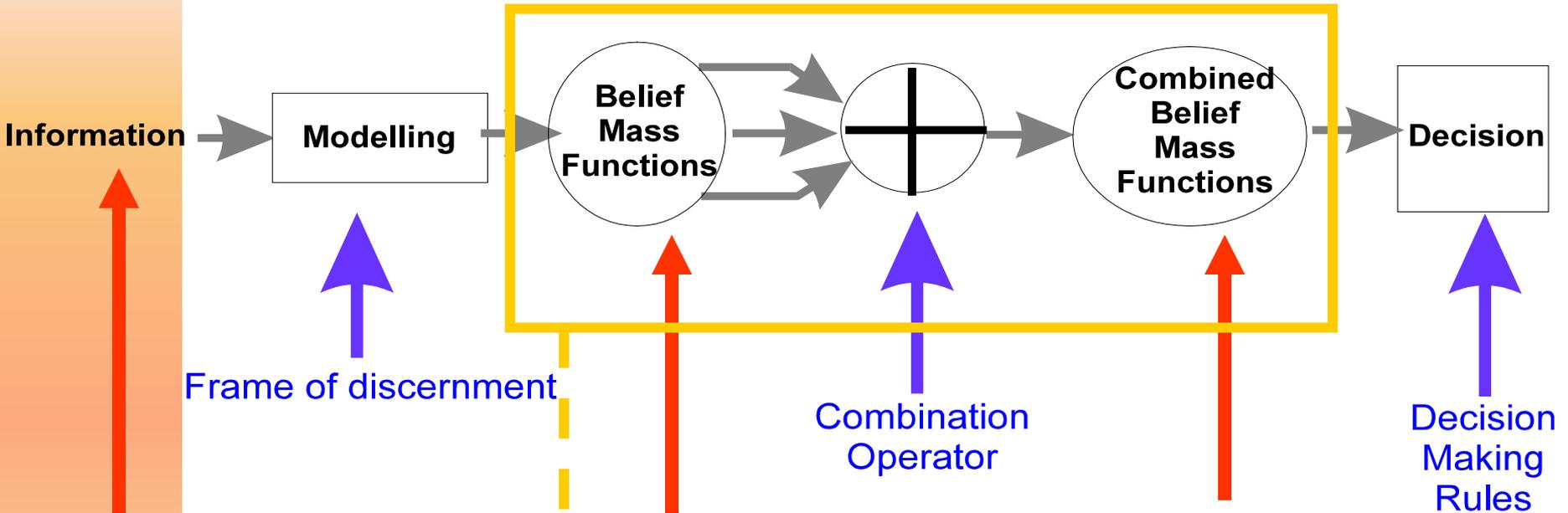
Dempster, 67
 Zadeh, 79
 Yager, 87
 Dubois & Prade, 88
 Lefevre, Colot et al., 01,02

Smets, 94
 Strat, 84
 Dencœux, 97...

Introduction

De l'information à la décision

Information processing



Information Sources

Schéma TBM (Smets)

Knowledge Modelling
Credal Level

Knowledge Synthesis

Pignistic Level



Approche crédibiliste



Modélisation de l'incertitude

- Basée sur une distribution de masse d'évidence m
(*Basic Belief Assignment* : *bba*)
- Définie sur l'ensemble des propositions de Ω
- Associée à la croyance (bel) et à la plausibilité (pl)

Distribution de masses de croyance

$$m : 2^{\Omega} \rightarrow [0, 1]$$
$$A \mapsto m(A)$$

$m(A)$: confiance portée strictement dans A sans que celle-ci puisse être répartie sur les hypothèses qui la composent

Éléments focaux : propositions qui ont une masse non nulle

Modélisation

- *Masse de croyance*

Cadre de discernement: $\Omega = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_n\}$

Exclusives

$$m: 2^\Omega \rightarrow [0,1]$$

$$i) m(\emptyset) = 0 \quad 2^\Omega = \{\emptyset, H_1, H_2, \dots, H_n, H_{1 \cup 2}, \dots, \Omega\}$$

$$ii) \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$$

$m(\Omega)$ quantifie l'ignorance ou l'incertitude

Noyau : ensemble des éléments focaux: $N = \{A \in 2^\Omega / m(A) > 0\}$

Exemples:

Appartenance d'un pixel à une région, d'un vecteur forme à une classe,...

Exemple

Un meurtre a été commis.

Trois suspects: Pierre, Paul et Marie.

- $\Omega = \{\text{Pierre, Paul, Marie}\}$
- Un témoin croit avoir vu que le meurtrier est un homme, fiabilité = 0.7

$$m(\{\text{Pierre, Paul}\}) = 0.7$$

$$m(\Omega) = 0.3$$

- La masse de 0.7 reste attachée à l'ensemble $\{\text{Pierre, Paul}\}$, elle ne peut être distribuée à ses éléments en l'absence d'informations complémentaires.

Signification de $m(\emptyset)$

- Ω =ensemble d'états possibles, de réponses possibles à une certaine question.
- Dans certains cas, Ω n'est pas exhaustif (certaines réponses ont été oubliées, étaient inconcevables au moment de la modélisation du problème)
 - ↳ hypothèse du monde ouvert (*open-world*)
- Si Ω exhaustif (hypothèse du monde clos/*closed-world assumption*):

$$m(\emptyset)=0$$

Modélisation de la méconnaissance, ignorance

Méconnaissance = explicite

☞ masse attribuée à l'ensemble de définition

$$\Omega = \{ H_1, H_2, H_3 \}$$

$$m(H_1) = m(H_2) = m(H_3) = 0$$

$$m(H_1 \cup H_2 \cup H_3) = m(\Omega) = 1$$

Fonctions de base

- *Crédibilité*

$$bel : 2^\Omega \rightarrow [0,1]$$

$$bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

Toute la masse de croyance placée exactement sur A .

$$bel(A) = 1 - pl(\bar{A})$$

- *Plausibilité*

$$pl : 2^\Omega \rightarrow [0,1]$$

$$pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B)$$

Force avec laquelle on ne doute pas de la proposition A .

$$pl(\emptyset) = 0; pl(\Omega) = 1$$

$$bel(A) \leq P(A) \leq pl(A)$$

- *Probabilité pignistique (Pignistic level)*

$$BetP(H_n) = \sum_{H_n \in A} \frac{m(A)}{|A|}$$

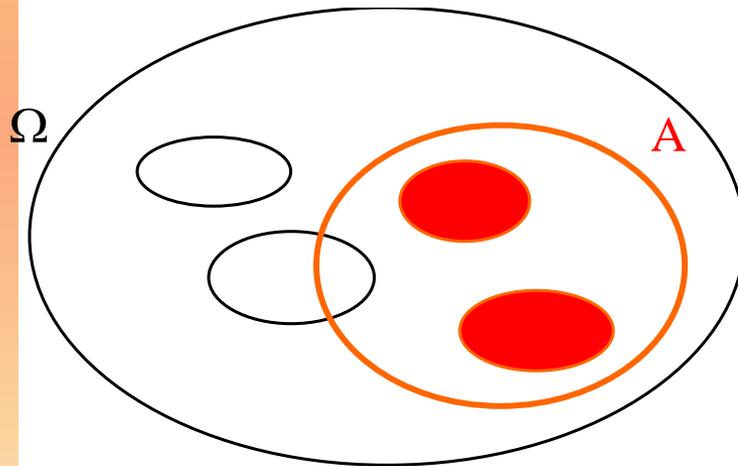
Fonctions de base

Croyance (belief)

$$bel : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto bel(A)$$

$bel(A)$: croyance que la vérité est dans A



$$bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

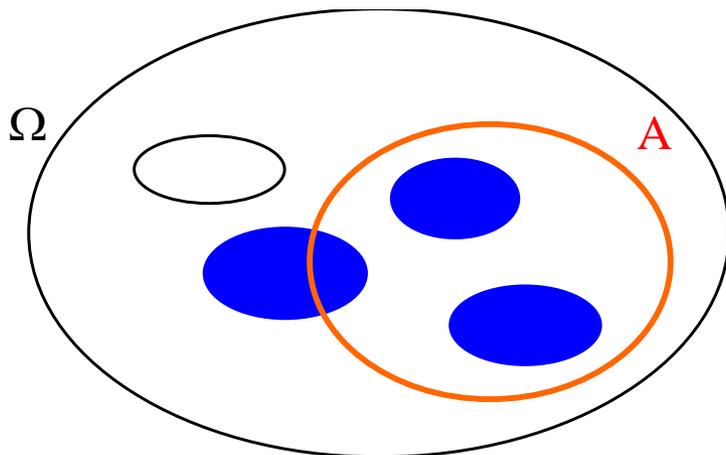
Croyance de A = somme des masses des propositions incluses dans A

Plausibilité (plausibility)

$$Pl : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto Pl(A)$$

$Pl(A)$: plausibilité que la vérité est dans A



$$Pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B)$$

Plausibilité de A = somme des masses des propositions dont l'intersection avec A n'est pas nulle

Propriétés

- Propriétés de la distribution de masse

$$\sum_{A \subset \Omega} m(A) = 1 \quad m(\emptyset) = 0$$

- Relation Croyance-Plausibilité

$$pl(A) = 1 - bel(\bar{A})$$

- Relation Masse-Croyance (formule de Moebius)

$$m(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{(|A|-|B|)} bel(B)$$

$$\forall A, B \in 2^\Omega, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) + P(\neg A) = 1$$

Croyance (bel) - Crédibilité

- bel : mesure sur-additive

$$bel(A \cup B) \geq bel(A) + bel(B) - bel(A \cap B)$$

$$bel(A) + bel(\bar{A}) \leq bel(\Omega) \leq 1$$

- Plus généralement :

$$\forall n \geq 1, \forall A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega,$$

$$bel(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_i bel(A_i) - \sum_{i>j} bel(A_i \cap A_j) \dots - (-1)^n bel(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

(capacité de Choquet complètement monotone)

Plausibilité (pl)

- pl : mesure sous-additive

$$pl(A \cup B) \leq pl(A) + pl(B) - pl(A \cap B)$$

$$pl(A) + pl(\bar{A}) \geq pl(\Omega) = 1 - m(\emptyset)$$

- Plus généralement :

$$\forall n \geq 1, \forall A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega,$$

$$pl(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_i pl(A_i) - \sum_{i>j} pl(A_i \cap A_j) \dots - (-1)^n pl(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Relations masse-croyance

Soit $bel : 2^\Omega \rightarrow [0,1]$ telle que $bel(\emptyset)=0$ et

$\forall n \geq 1, \forall A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega,$

$$bel(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_i bel(A_i) - \sum_{i>j} bel(A_i \cap A_j) \dots - (-1)^n bel(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

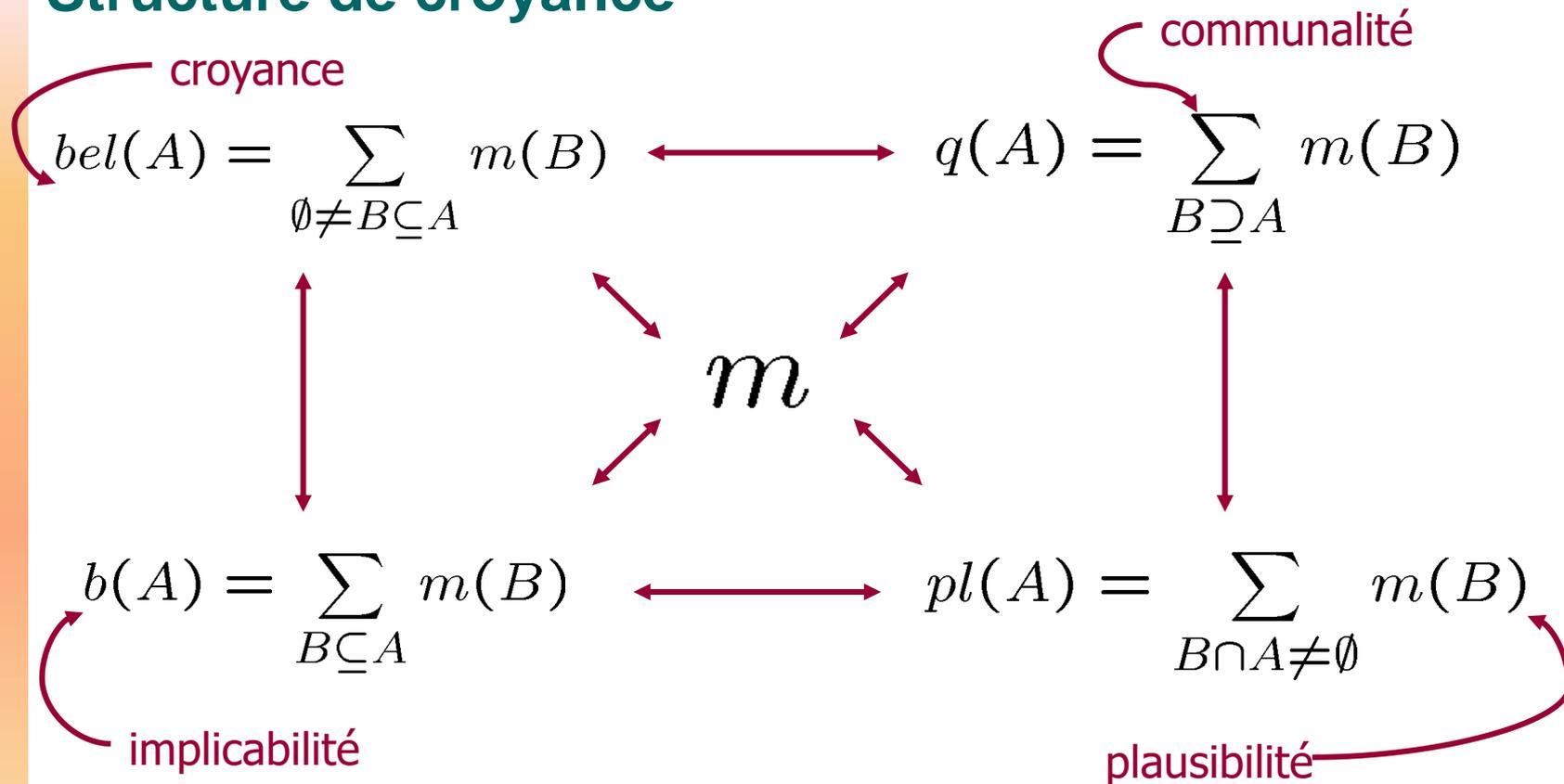
Alors la fonction m définie par

$$m(A) = \sum_{\{B / B \subseteq A, B \neq \emptyset\}} (-1)^{|A|-|B|} bel(B) \quad \forall A \in 2^\Omega - \emptyset$$

$$m(\emptyset) = 1 - bel(\Omega)$$

est une fonction de masse.

Structure de croyance



Situations particulières

Jeux de masses bayésiens

- Éléments focaux singletons : fonction de masse *bayésienne*

$$\forall A \subseteq \Omega, \quad m(A) \neq 0 \Rightarrow |A| = 1$$

On a alors **bel=pl=mesure de probabilité**

Rappel: $bel(A) \leq P(A) \leq pl(A)$

- Éléments focaux disjoints et non vides : fonction de masse *quasi-bayésienne*

$$\forall A, B \subseteq \Omega, \quad m(A) \neq 0 \text{ et } m(B) \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

Situations particulières

Éléments focaux emboîtés

Éléments focaux emboîtés :

$$\mathcal{F}(m) = \{A_1, \dots, A_n\}$$

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$$

Alors

$$bel(A \cap B) = \min(bel(A), bel(B))$$

$$pl(A \cup B) = \max(pl(A), pl(B))$$

pl est une mesure de possibilité, bel est la mesure de nécessité duale.

Situations particulières

Éléments focaux emboîtés (suite)

- *Réciproquement* : Soit Π une mesure de possibilité, et N la mesure de nécessité duale. N est une fonction de croyance, et Π la fonction de plausibilité duale.
- Soient $\pi_{(1)} > \dots > \pi_{(c)}$ les valeurs ordonnées de possibilité.

$$m(\emptyset) = 1 - \pi_{(1)}$$

$$m(\{\omega_{(1)}\}) = \pi_{(1)} - \pi_{(2)}$$

$$\vdots$$

$$m(\{\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i)}\}) = \pi_{(i)} - \pi_{(i+1)}$$

$$\vdots$$

$$m(\Omega) = \pi_{(c)}$$

Situations particulières

Et donc...

- Liens avec la théorie des probabilités
- Liens avec la théorie des possibilités
- Théorie de l'évidence  plus générale

Petit exemple

« Qui a tué le docteur Lenoir? »

Un meurtre a été commis. Trois suspects: Pierre, Paul et Marie.

- $\Omega = \{\text{Pierre, Paul, Marie}\}$
- Un témoin croit avoir vu que le meurtrier est un homme,
- Confiance dans le témoignage = 0.7

$$m(\{\text{Pierre, Paul}\}) = 0.7$$

$$m(\Omega) = 0.3$$

- La masse de 0.7 reste attachée à l'ensemble $\{\text{Pierre, Paul}\}$, elle ne peut être distribuée à ses éléments.

Petit exemple

Masse, croyance, plausibilité

A	m(A)	bel(A)	pl(A)
\emptyset	0	0	0
{Pierre}	0	0	1
{Paul}	0	0	1
{Marie}	0	0	0.3
{Pierre,Paul}	0.7	0.7	1
{Pierre,Marie}	0	0	1
{Paul,Marie}	0	0	1
Ω	0.3	1	1

Modélisation – jeux de masses initiaux

Modélisation des sources

Deux types de modèle principalement :

- **Modèles fondés sur des vraisemblances**
Shafer 76, Smets 78, Appriou 91,...
- **Modèles fondés sur des distances**
Denœux 95,...

- **Modélisation de l'imprécision impossible**

utilisation des distributions de probabilités ou des sous-ensembles flous

- **Modélisation (obtention bba)**

Modèle fondé sur des distances

Modèle fondé sur des vraisemblances

Dencœux :

$$m(H_i) = \alpha_0 \exp[-(\gamma(d-d_i))] \\ m(\Omega) = 1 - \alpha_0 \exp[-(\gamma(d-d_i))]$$

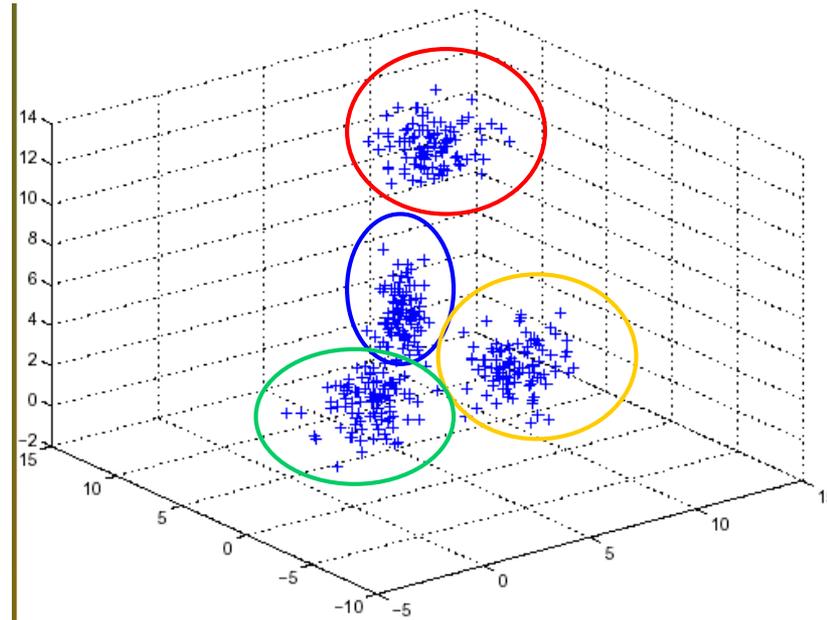
Smets (GBT)- Appriou :

$$m(\bar{H}_i) = \alpha_0 \{1 - R p(d/H_i)\} \\ m(\Omega) = 1 - \alpha_0 \{1 - R p(d/H_i)\}$$

d_i : prototype de mesure quand H_i est vérifiée

On modélise H_i et l'ignorance

On modélise $\neg H_i$ et l'ignorance



Dencœux :

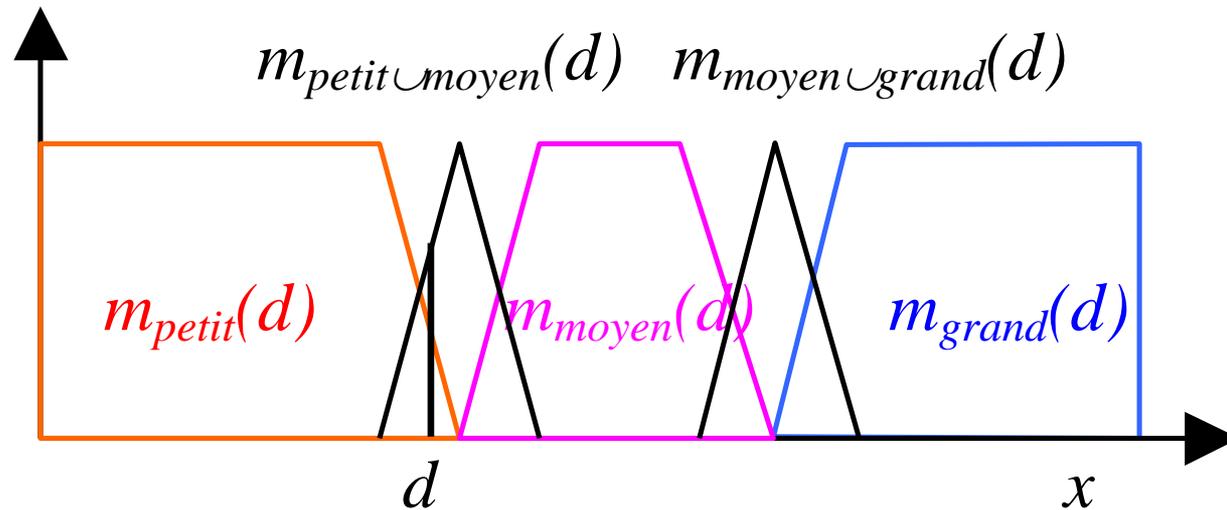
$$m(H_i) = \alpha_0 \exp[-(\gamma(d-d_i))]$$

$$m(\Omega) = 1 - \alpha_0 \exp[-(\gamma(d-d_i))]$$

d_i : prototype de mesure quand H_i est vérifiée

Conversion flou-évidence

Basée sur l'utilisation des sous-ensembles flous
 Evidence d'appartenance à une classe ou un sous-ensemble de classes



- Somme orthogonale de Dempster

$$m = m_1 \oplus m_2$$
$$m(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

- Modélisation du conflit

$$K = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

Combinaison

• Combinaison de sources d'information

$$m_{\oplus}(H) = m^{S_1}(H) \oplus m^{S_2}(H) \oplus \dots \oplus m^{S_q}(H)$$

Jeu de masses combiné \rightarrow synthèse des croyances

Cas à 2 sources:

$$m_{\oplus}(H) = \frac{1}{1 - m(\emptyset)} \sum_{H_i \cap H_j = H} m^{S_1}(H_i) \cdot m^{S_2}(H_j) = \frac{1}{1 - m(\emptyset)} m_{\cap}(H)$$

Masse conflictuelle

Combinaison
conjonctive

Propriétés: commutativité, associativité

La masse conflictuelle est proportionnellement réallouée

Combinaison

Intersections

$$\Omega = \{H_1, H_2\}$$

m_1	H_1	H_2	$\Omega=H_{12}$
m_2			
H_1	H_1	\emptyset	H_1
H_2	\emptyset	H_2	H_2
$\Omega=H_{12}$	H_1	H_2	H_{12}

$$m_{1,2}(H_1) = m_1(H_1).m_2(H_1) + m_1(H_1).m_2(H_{12}) + m_1(H_{12}).m_2(H_1)$$

$$m_{1,2}(H_2) = m_1(H_2).m_2(H_2) + m_1(H_2).m_2(H_{12}) + m_1(H_{12}).m_2(H_2)$$

$$m_{1,2}(H_{12}) = m_1(H_{12}).m_2(H_{12})$$

$$K = m_1(H_1).m_2(H_2) + m_1(H_2).m_2(H_1)$$

Combinaison

Hypothèses

H_1 : Je mesure 1m80

H_2 : Je mesure 1m85

Sources

S_1 : Etudiant 1

S_2 : Etudiant 2

Cadre de discernement:

$$2^\Omega = \{\emptyset, H_1, H_2, H_1 \cup H_2\}$$

$$\Omega = \{H_1, H_2\}$$

$$(Rq : H_1 \cup H_2 = \Omega)$$

$$S_1: \begin{cases} m^{S_1}(H_1) = 0,9 \\ m^{S_1}(H_2) = 0,1 \\ m^{S_1}(\Omega) = 0 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} m^{S_2}(H_1) = 0,8 \\ m^{S_2}(H_2) = 0,2 \\ m^{S_2}(\Omega) = 0 \end{cases}$$

Combinaison

$\Omega = \{H_1, H_2\}$; 2 sources S_1 et S_2

$$\begin{cases} m^{S_1}(H_1) = 0,9 \\ m^{S_1}(H_2) = 0,1 \\ m^{S_1}(\Omega) = 0 \end{cases}
 \begin{cases} m^{S_2}(H_1) = 0,8 \\ m^{S_2}(H_2) = 0,2 \\ m^{S_2}(\Omega) = 0 \end{cases}
 \begin{cases} m_{\oplus}(H_1) = 0,97 \\ m_{\oplus}(H_2) = 0,03 \\ m_{\oplus}(\Omega) = 0 \\ m(\emptyset) = 0,26 \end{cases}$$

Conflit faible

$$\begin{cases} m^{S_1}(H_1) = 0,9 \\ m^{S_1}(H_2) = 0,1 \\ m^{S_1}(\Omega) = 0 \end{cases}
 \begin{cases} m^{S_2}(H_1) = 0,2 \\ m^{S_2}(H_2) = 0,8 \\ m^{S_2}(\Omega) = 0 \end{cases}
 \begin{cases} m_{\oplus}(H_1) = 0,69 \\ m_{\oplus}(H_2) = 0,31 \\ m_{\oplus}(\Omega) = 0 \\ m(\emptyset) = 0,74 \end{cases}$$

Conflit fort

Attention au conflit!

Origines du conflit

- **Données aberrantes**

- ☞ Dysfonctionnement d'un capteur
- ☞ Mauvaise estimation de la gamme de fonctionnement d'un capteur

- **Modélisation des sources d'information**

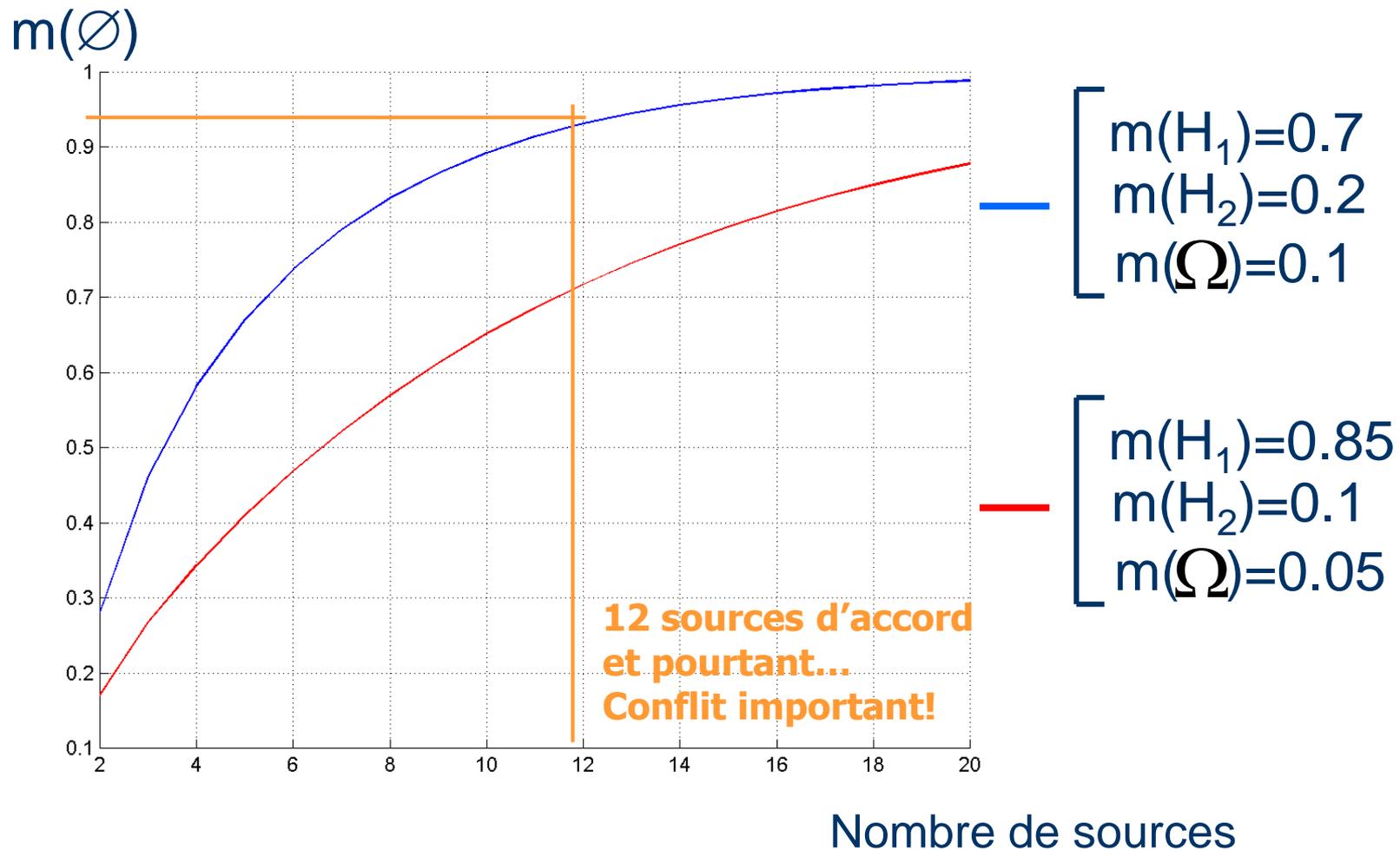
- ☞ Modélisation imprécise des fonctions de croyance

- **Nombre de sources d'information à fusionner**

- ☞ Conflit augmente avec le nombre de sources à fusionner

Combinaison

Masse conflictuelle vs. Nombre de sources à agréger



Solutions « classiques » pour résoudre le conflit

□ Sources fiables

Opérateur de Dempster

Conflit → **Cadre de discernement non exhaustif** (Smets)

Problème mal posé (open-world)

∅ : hypothèse(s) non prise(s) en compte dans le cadre de discernement

□ Sources non fiables

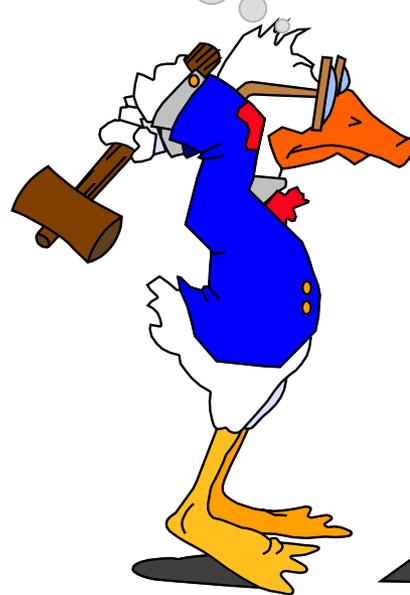
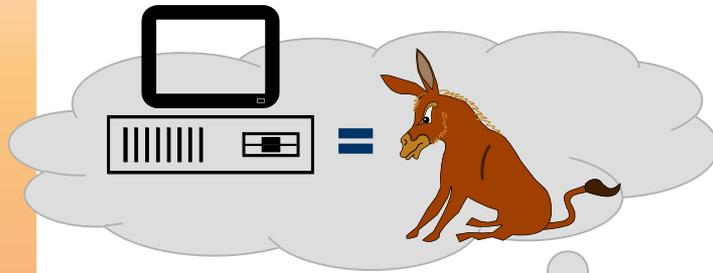
- **Règles de combinaison:** Dubois & Prade, Yager, Lefevre
Cadre de discernement exhaustif (closed-world)
- **Affaiblissement:** $m(A) = \lambda m(A)$ avec $0 < \lambda < 1$

☞ degré de confiance dans la source

Is there some one to tell me what to do?

Quelle(s) stratégie(s) pour résoudre le conflit?
Affaiblissement? Distribution? Quelle distribution?

Ou...



> $m(\emptyset)=1$!

> Encore une p'tite partie?

...Devons-nous jouer aux dés?

Combinaison d'informations

Le meurtre du Docteur Lenoir: deuxième acte.

- $\Omega = \{\text{Pierre, Paul, Marie}\}$
- Témoignage : « Le meurtrier est un homme » (confiance=0.7)
 $m_1(\{\text{Pierre, Paul}\}) = 0.7$ $m_1(\Omega) = 0.3$
- Indice : mégot → « Le meurtrier est fumeur », confiance=0.6
 $m_2(\{\text{Pierre, Marie}\}) = 0.6$ $m_2(\Omega) = 0.4$
- *Problème* : combinaison des ces deux sources d'information ?

Somme conjonctive

- Les deux sources d'information sont fiables : combinaison conjonctive :

$$(m_1 \circledast m_2)(C) = \sum_{A \cap B = C} m_1(A) m_2(B)$$

- Pour l'affaire relative au meurtre du Docteur Lenoir :
 - $m_1(\{\text{Pierre, Paul}\})=0.7$ $m_1(\Omega)=0.3$
 - $m_2(\{\text{Pierre, Marie}\})=0.6$ $m_2(\Omega)=0.4$
 - $m_1 \cap m_2(\{\text{Pierre, Paul}\})=0.28$
 - $m_1 \cap m_2(\{\text{Pierre, Marie}\})=0.18$
 - $m_1 \cap m_2(\{\text{Pierre}\})=0.42$
 - $m_1 \cap m_2(\Omega)=0.12$

Somme conjonctive

- Propriétés :
 - commutativité, associativité
 - $m(\Omega)=1$ élément neutre
 - $m(\emptyset)=1$ élément absorbant

- Degré de conflit :

$$K = (m_1 \cap m_2)(\emptyset) = \sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A) \cdot m_2(B)$$

- Règle de Dempster : somme conjonctive + normalisation

$$(m_1 \oplus m_2)(C) = \frac{\sum_{A \cap B = C} m_1(A) \cdot m_2(B)}{1 - K}$$

Somme disjonctive

- L'une au moins des deux sources d'information est fiable : combinaison disjonctive :

$$(m_1 \cup m_2)(C) = \sum_{A \cup B = C} m_1(A)m_2(B)$$

- Pour l'affaire relative au meurtre du Docteur Lenoir :
 - $m_1(\{\text{Pierre, Paul}\})=0.7$ $m_1(\Omega)=0.3$
 - $m_2(\{\text{Pierre, Marie}\})=0.6$ $m_2(\Omega)=0.4$
 - $m_1 \cup m_2(\Omega)=0.42+0.28+0.18+0.12=1$
 ☞ Finalement, l'ignorance règne !
- Propriétés :
 - commutativité, associativité
 - $m(\Omega)=1$ élément absorbant
 - $m(\emptyset)=0$ élément neutre

Opérateurs de Combinaison

S_1 et S_2 fiables

$S_1 \longrightarrow m_1$

$S_2 \longrightarrow m_2$

S_1 ou S_2 fiable

somme conjonctive

$$(m_1 \odot m_2)(C) = \sum_{A \cap B = C} m_1(A) m_2(B)$$

$$q_1 \odot_2 = q_1 \cdot q_2$$

$$(m_1 \oplus m_2)(C) = \sum_{A \cup B = C} m_1(A) m_2(B)$$

$$b_1 \oplus_2 = b_1 \cdot b_2$$

somme disjonctive

L'une au moins des sources est fiable, mais on ignore laquelle

Combinaison

Cadre générique

$$\forall A \in 2^\Omega \quad m(A) = m_\cap(A) + w(m, A) \cdot m(\emptyset)$$

Masse non conflictuelle Masse conflictuelle
Poids
 fixé, appris, calculé

Yager:

$w(m, A) = 1$ si $A = \Omega$ et 0 ailleurs

Smets:

$\forall A \subseteq \Omega \quad w(m, A) = 0$ et $w(m, \emptyset) = 1$

Apprentissage:

$0 \leq w(m, A) \leq 1$

Dempster:

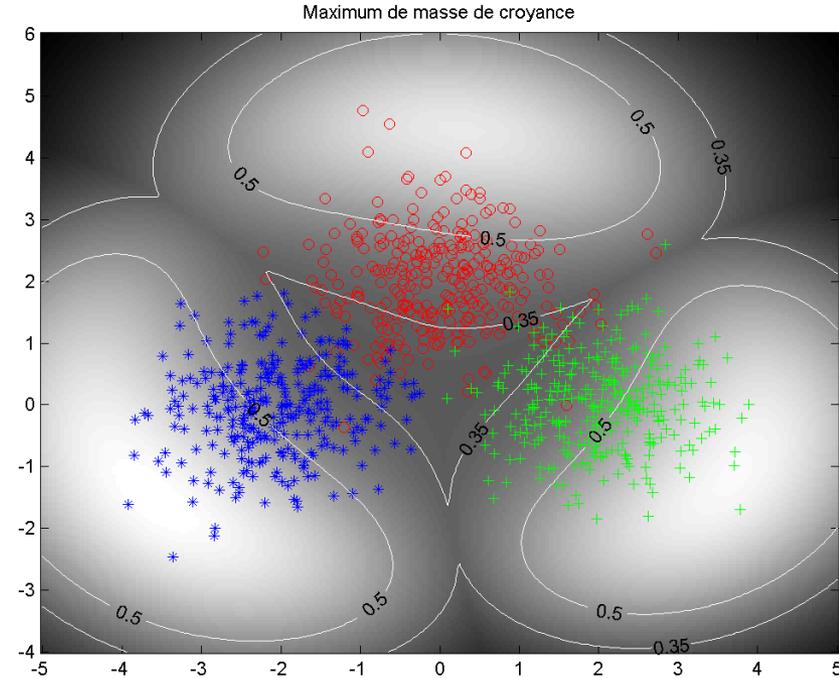
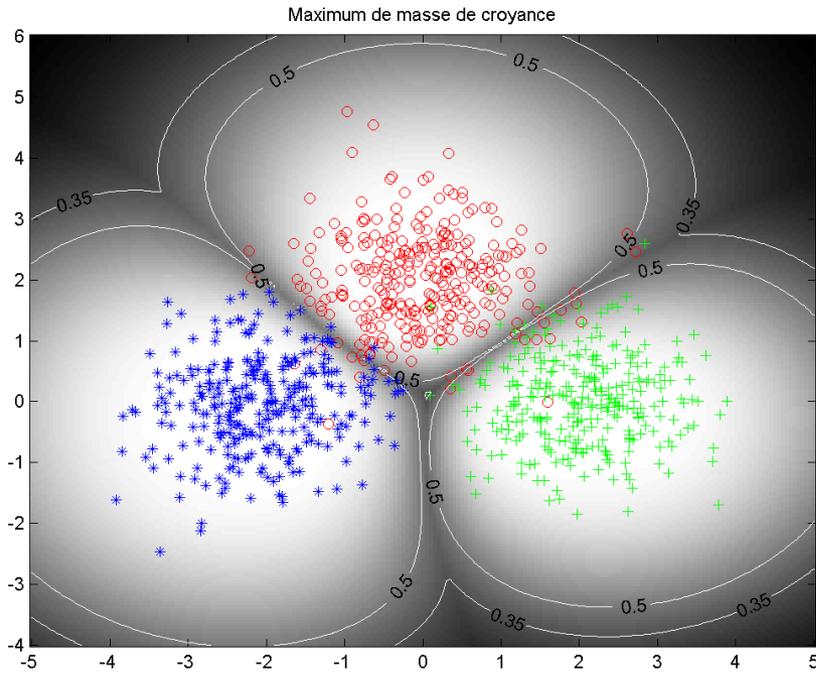
$\forall A \subseteq \Omega \quad w(m, A) = m_\cap(A) / (1 - m(\emptyset))$

Dubois&Prade

$w(m, A) = f(m(B), m(C))$ si $A = B \cup C$
et 0 ailleurs

Différentes redistributions:

$0 \leq w(m, A) \leq 1$



Redistribution: Dempster

Redistribution: $W(m,H)=1/3$

Faible

Elevé

Affaiblissement (*discounting*)

- m induite par une source S
- $P(S \text{ non fiable}) = \alpha$
- Affaiblissement de m :

$${}^{\alpha}m(A) = (1 - \alpha)m(A) \quad \forall A \in 2^{\Omega} \setminus \Omega$$

$${}^{\alpha}m(\Omega) = m(\Omega) + \alpha(1 - m(\Omega))$$

- Si $\alpha = 1$ \rightarrow ${}^{\alpha}m(\Omega) = 1$
- Si $\alpha = 0$ \rightarrow ${}^{\alpha}m = m$

Règles de décision

- Maximum de croyance
- Maximum de plausibilité
- Maximum de probabilité pignistique

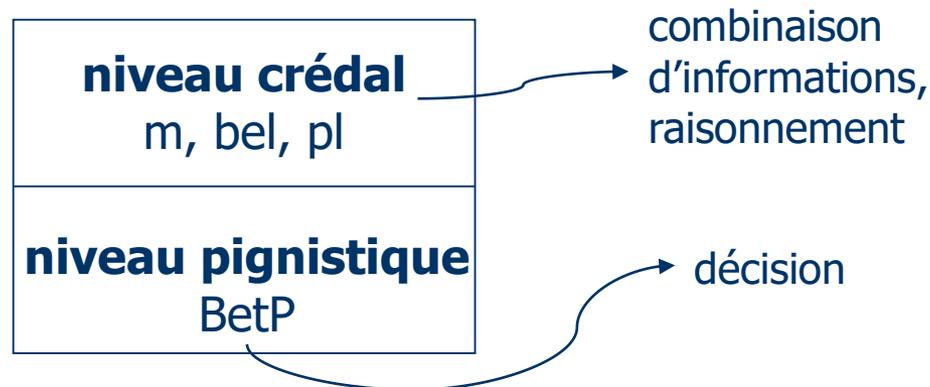
Probabilité pignistique

- Transformation pignistique : $m \rightarrow \text{BetP}$ t.q.

$$\text{BetP}(\omega) = \sum_{\{A \subseteq \Omega / \omega \in A\}} \frac{m^*(A)}{|A|} \quad m^*(A) = \frac{m(A)}{1 - m(\emptyset)} \quad A \neq \emptyset$$

$$m^*(\emptyset) = 0$$

- Modèle des croyances transférables (MCT; *TBM in english*)



$$\text{BetP}(\omega_i) = \sum_{A \subseteq \Omega, A \neq \emptyset} m_{\oplus}(A) \frac{|\omega_i \cap A|}{|A|}$$

$|A|$: cardinal de l'ensemble A

Des jeux de masses, on passe à des probabilités (probabilités pignistiques) pour prendre une décision

Décision:

Hypothèse singleton

- ω_i décidée si $\text{BetP}(\omega_i)$ maximum
 - ω_i décidée si $\text{PI}(\omega_i)$ maximum
- (Coûts $\{0,1\}$)

Remarque: on peut aussi faire du rejet

Principe

- Soit m une fonction de masse sur Ω traduisant un certain état de connaissance
- $\mathcal{A}=\{a_1, \dots, a_N\}$ ensemble d'actions
- $C(a_i/\omega_j)$ =coût si choix de l'action a_i alors que $y=\omega_j$ (e.g. coûts $\{0,1\}$).
- Principes de rationalité (théorie bayésienne de la décision) : choix de l'action de **risque** (espérance du coût) **minimum** pour une certaine distribution de probabilité P .

- Choix de P ?

- En MCT (TBM) : $BetP(\omega) = \sum_{B \subseteq \Omega, \omega \in B} \frac{m(B)}{(1-m(\emptyset))^{|B|}}$

- Choix de l'action $a_i \in \mathcal{A}$ qui minimise le risque

$$R_{BetP}(a_i) = \sum_{\omega \in \Omega} C(a_i, \omega) BetP(\omega)$$

- Si $\mathcal{A} = \Omega$ alors $C(\omega_i, \omega_j) = 1 - \delta_{ij}$ (coût $\{0,1\}$)

☞ Règle du maximum de probabilité pignistique

Règles de décision

- Maximum de croyance
- **Maximum de plausibilité**
- Maximum de probabilité pignistique

Règle du maximum de plausibilité

☞ Choisir l'action qui minimise l'espérance inférieure du coût :

$$R_*(a_i) = \sum_{\omega \in \Omega} \min_{\omega \in B} m(B)C(a_i, \omega) = \min_{bel \leq P \leq pl} R_P(a_i)$$



les deux règles peuvent conduire à des résultats différents

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{70}\}$$

$$m(\omega_1) = 0.3 \quad m(\omega_2) = 0.01 \quad m(\{\omega_2, \dots, \omega_{70}\}) = 0.69$$

$$pl(\omega_1) = 0.3$$

$$\text{☞ } BetP(\omega_1) = 0.3$$

$$\text{☞ } pl(\omega_2) = 0.7$$

$$BetP(\omega_2) = 0.02$$

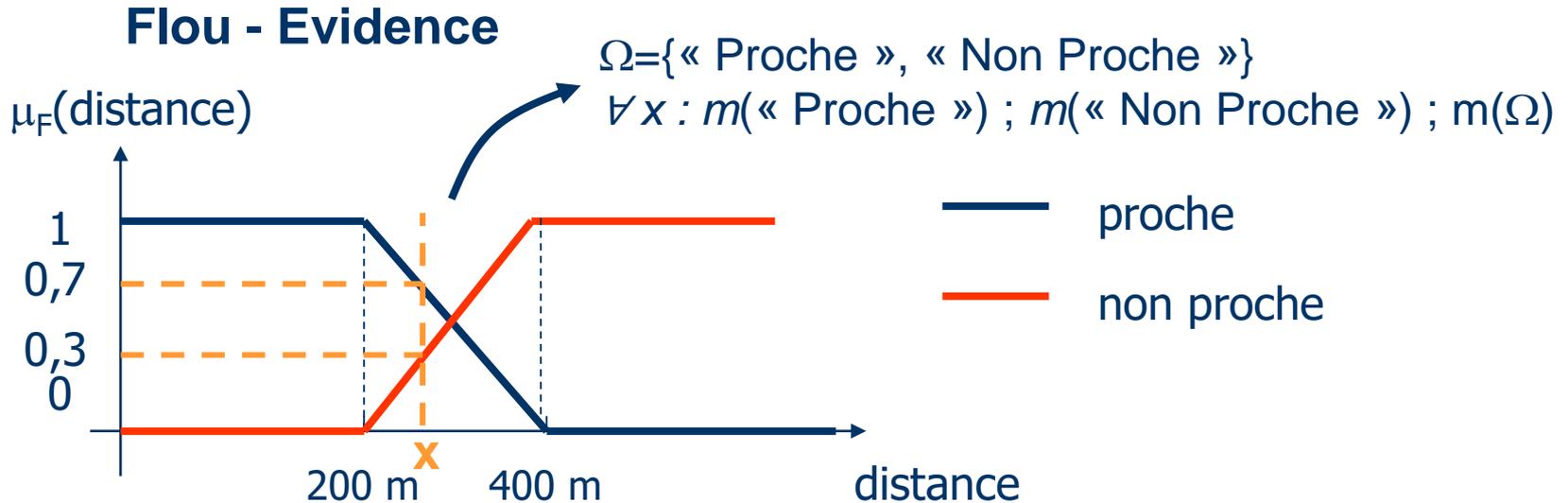
$$pl(\omega_i) = 0.69$$

$$BetP(\omega_i) = 0.01$$

$$\forall i \in \{3, \dots, 70\}$$

$$\forall i \in \{3, \dots, 70\}$$

Application numérique



Si l'on a une information quant à la fiabilité de la source, alors:

$P(\text{source non fiable}) = \alpha$ et $P(\text{source fiable}) = 1 - \alpha \rightarrow$ Indice de fiabilité : $1 - \alpha = \beta$

$${}^{\alpha}m(A) = (1 - \alpha)m(A) \quad \forall A \in 2^{\Omega} \setminus \Omega$$

$${}^{\alpha}m(\Omega) = m(\Omega) + \alpha(1 - m(\Omega))$$

Exemple : $P(\text{source non fiable}) = 0,2$

$${}^{\alpha}m(\text{« Proche »}) = 0,8 \times m(\text{« Proche »}) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$$

$${}^{\alpha}m(\text{« non Proche »}) = 0,8 \times m(\text{« non Proche »}) = 0,8 \times 0,3 = 0,24$$

$${}^{\alpha}m(\Omega) = m(\Omega) + 0,2(1 - m(\Omega)) = 0,2$$

Application numérique

Petite histoire féline

Un dimanche matin, Paul se préparait à prendre son petit déjeuner en compagnie de sa femme et de sa fille. Il commença par dresser la table en plaçant en son centre un appétissant gâteau au chocolat cuisiné la veille par sa tendre épouse. Ceci fait, il détourna son attention de la table quelques secondes, le temps d'aller chercher le café fumant qui accompagnerait parfaitement la généreuse portion de gâteau qu'il n'allait pas manquer de se servir.

Lorsqu'il se retourna, quelle ne fut pas sa stupeur de constater que la merveille chocolatée avait été sauvagement agressée et entamée sans aucun respect des règles de l'art selon toute vraisemblance. Il se retourna vers sa femme et sa fille pour leur signifier son indignation et demander des informations quant à l'auteur d'un tel méfait!

L'une et l'autre, également stupéfaites par ce qui allait devenir « l'affaire du gâteau », lui dirent avoir entr'aperçu une forme féline s'enfuir prestement. Ainsi donc, le suspect devait être l'un des trois chats qui partageaient la vie de la famille: Kikirikiki (K), Bradpiteux (B) et Roberouanekeynobi (R).

Cependant, selon les informations fournies par les deux témoins, aucun des trois suspects ne pouvait être identifié avec certitude. Paul décida alors de résoudre l'énigme du « chat voleur » en utilisant la théorie des fonctions de croyance.

Application numérique

A partir des dires des deux témoins, voici ce que Paul put établir.

$$\Omega = \{K, B, R\}$$

$$2^\Omega = \{\emptyset, K, B, R, K \cup B, K \cup R, B \cup R, K \cup B \cup R\}$$

$A:$	$\{K\}$	$\{B\}$	$\{R\}$	$\{KB\}$	$\{KR\}$	$\{BR\}$	$\{KBR\}$
$m_1(A)$	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1
$m_2(A)$	0,05	0,1	0,3	0,05	0,1	0,2	0,2

Paul va-t-il pouvoir résoudre cette fâcheuse « affaire du gâteau » et découvrir l'identité du malfaiteur?

Application numérique

Vous êtes Paul et comme lui vous devez:

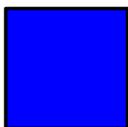
- 1) Calculer $m = m_1 \oplus m_2$
- 2) Calculer $bel(A)$, $pl(A)$ et $BetP(A)$
- 3) En déduire l'identité de l'odieux malfaiteur

Rappel :

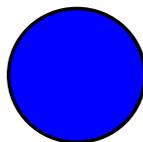
$A:$	$\{K\}$	$\{B\}$	$\{R\}$	$\{KB\}$	$\{KR\}$	$\{BR\}$	$\{KBR\}$
$m_1(A)$	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1
$m_2(A)$	0,05	0,1	0,3	0,05	0,1	0,2	0,2

Cadres de discernement compatibles/différents

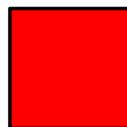
Discrimination d'objets



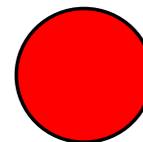
A



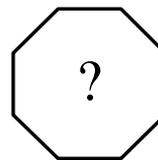
B



C



D



sources conjonctives

Capteur S_1

$$m_1(\text{bleu}) = 0,6$$

$$m_1(\text{bleu} \cup \text{rouge}) = 0,4$$

Capteur S_2

$$m_2(\text{bleu}) = 0,2$$

$$m_2(\text{bleu} \cup \text{rouge}) = 0,8$$

sources disjonctives

Capteur S_1

$$m_1(\text{bleu}) = 0,6$$

$$m_1(\text{bleu} \cup \text{rouge}) = 0,4$$

Capteur S_2

$$m_2(\text{rouge}) = 0,2$$

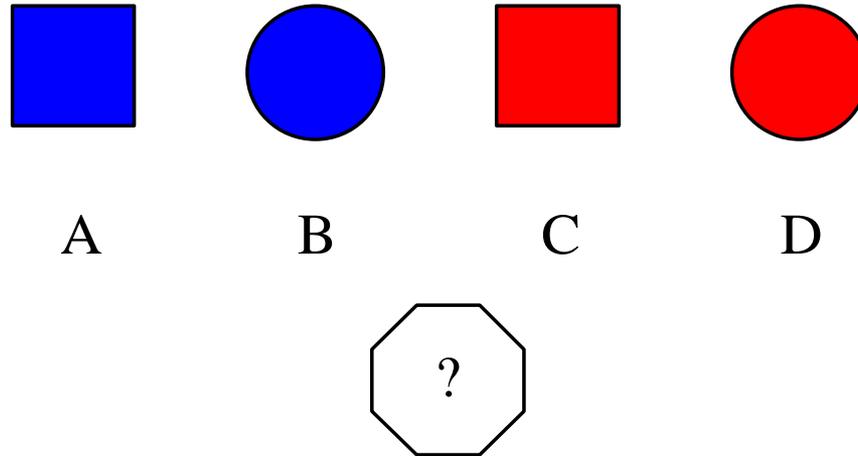
$$m_2(\text{bleu} \cup \text{rouge}) = 0,8$$

$$\Omega = \{\text{bleu}, \text{rouge}\}$$

$$2^\Omega = \{\text{bleu}, \text{rouge}, \text{bleu} \cup \text{rouge}\}$$

Cadres de discernement compatibles/différents

Discrimination d'objets



Capteur S_1

$$m_1(\text{bleu}) = 0,6$$

$$m_1(\text{bleu} \cup \text{rouge}) = 0,4$$

Capteur S_2

$$m_2(\text{rond}) = 0,2$$

$$m_2(\text{rond} \cup \text{carré}) = 0,8$$

$$\Omega_1 = \{ \text{bleu}, \text{rouge} \}$$



$$\Omega_2 = \{ \text{rond}, \text{carré} \}$$

Fusion de sources définies sur des référentiels différents

Référentiels non exhaustifs différents

- S_1 définie sur $\Omega_{S_1} = \{H_1, H_2, H_3\}$
- S_2 définie sur $\Omega_{S_2} = \{H_2, H_3, H_4\}$

- Référentiel non exhaustif  « open-world »
- Ici, référentiels différents mais compatibles
- Problème : processus de fusion ?

Fusion de sources définies sur des référentiels différents

Approches possibles

- Déconditionnement
- Correction des plausibilités

*Approche
crédibiliste*

Fusion de sources définies sur des référentiels différents

Correction des plausibilités

- S_1 définie sur $\Omega_{S_1} = \{H_1, H_2, H_3\}$
- S_2 définie sur $\Omega_{S_2} = \{H_2, H_3, H_4\}$

$$\omega_c = \{H_2, H_3\} \text{ (partie commune)}$$

$$\Omega = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$$

$$pl_{\Omega}(H_2) = pl_{\Omega_{S_1}}(H_2) \cdot pl_{\Omega_{S_2}}(H_2)$$

$$pl_{\Omega}(H_3) = pl_{\Omega_{S_1}}(H_3) \cdot pl_{\Omega_{S_2}}(H_3)$$

$$\rightarrow pl_{\Omega}(H_1) = pl_{\Omega_{S_1}}(H_1) \cdot pl_{\Omega_{S_2}}(\omega_c)$$

$$\rightarrow pl_{\Omega}(H_4) = pl_{\Omega_{S_1}}(\omega_c) \cdot pl_{\Omega_{S_2}}(H_4)$$

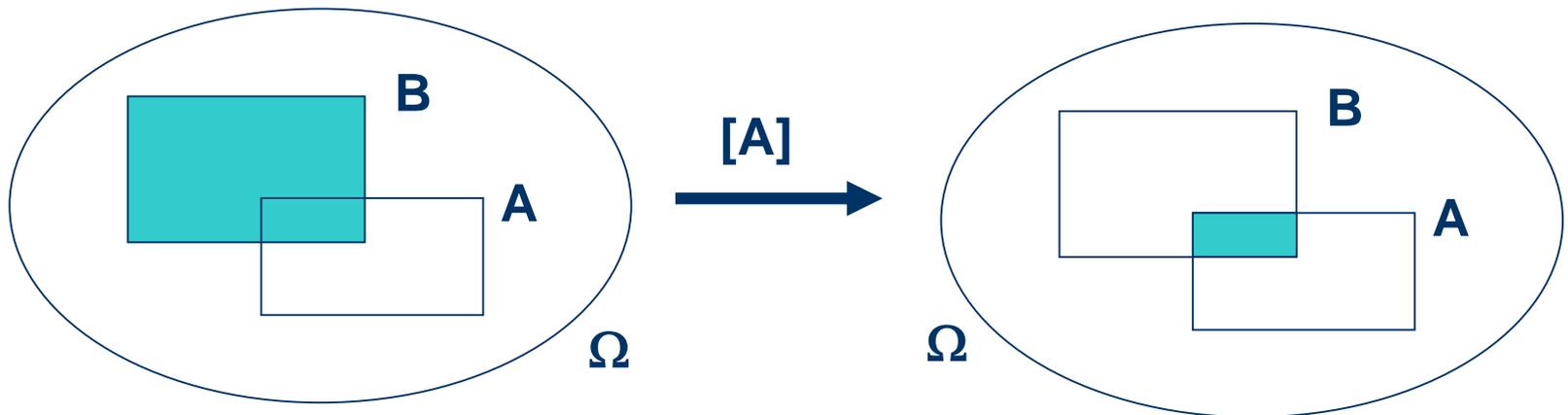
Conditionnement

Règle de conditionnement de Dempster

- Cas particulier de la somme conjonctive

$$m[A] = m \circledast m_A$$

$$\text{avec } m_A(A) = 1 \quad A \subseteq \Omega$$



Chaque masse $m(B)$ est transférée à $B \cap A$

➔ MCT (ou TBM)

Remarque : cas particulier de la règle de combinaison de Dempster

Déconditionnement

- **Principe**

Hypothèse: on connaît $m^\Omega[A]$ pour $A \subseteq \Omega$

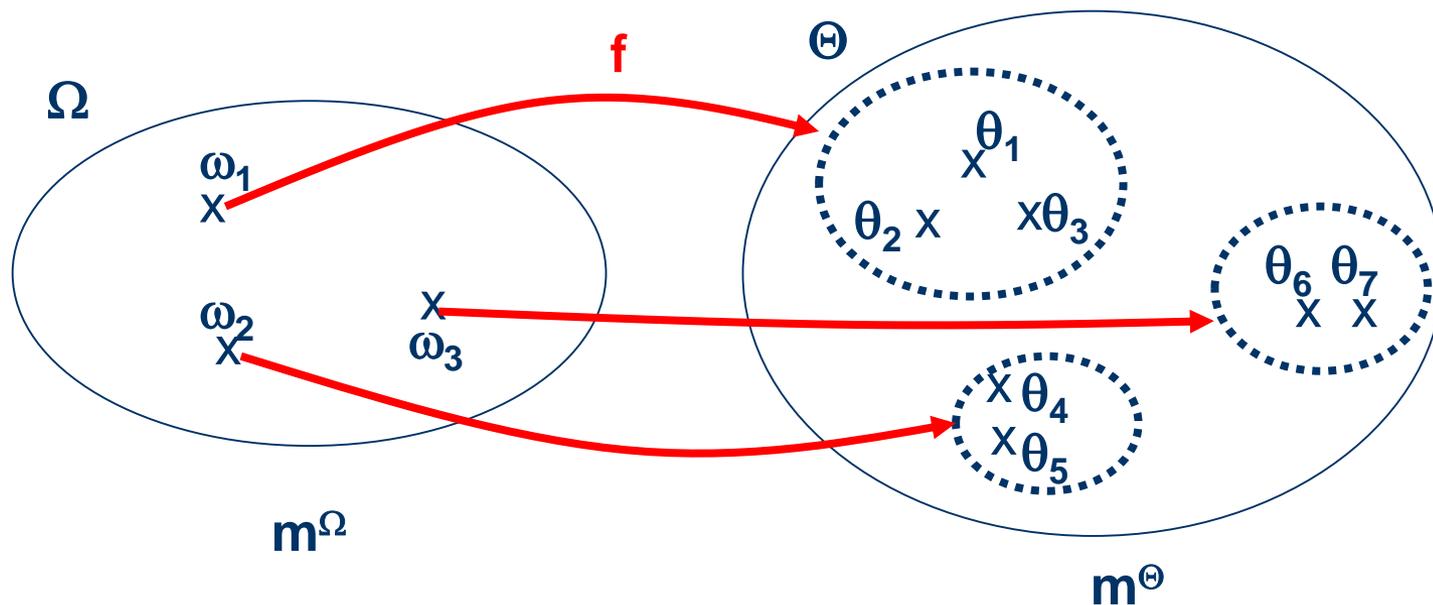
Etat de connaissance sur $\omega \in \Omega$ et sachant que $\omega \in A$

Problème : Comment en déduire une masse non conditionnelle sur Ω ?

Solution : Rechercher la fonction de masse la moins informative dont le conditionnement par rapport à A redonne $m^\Omega[A]$

$$m^\Omega(B \cup \neg A) = m^\Omega[A](B) \quad \forall B \subseteq A$$

● Principe



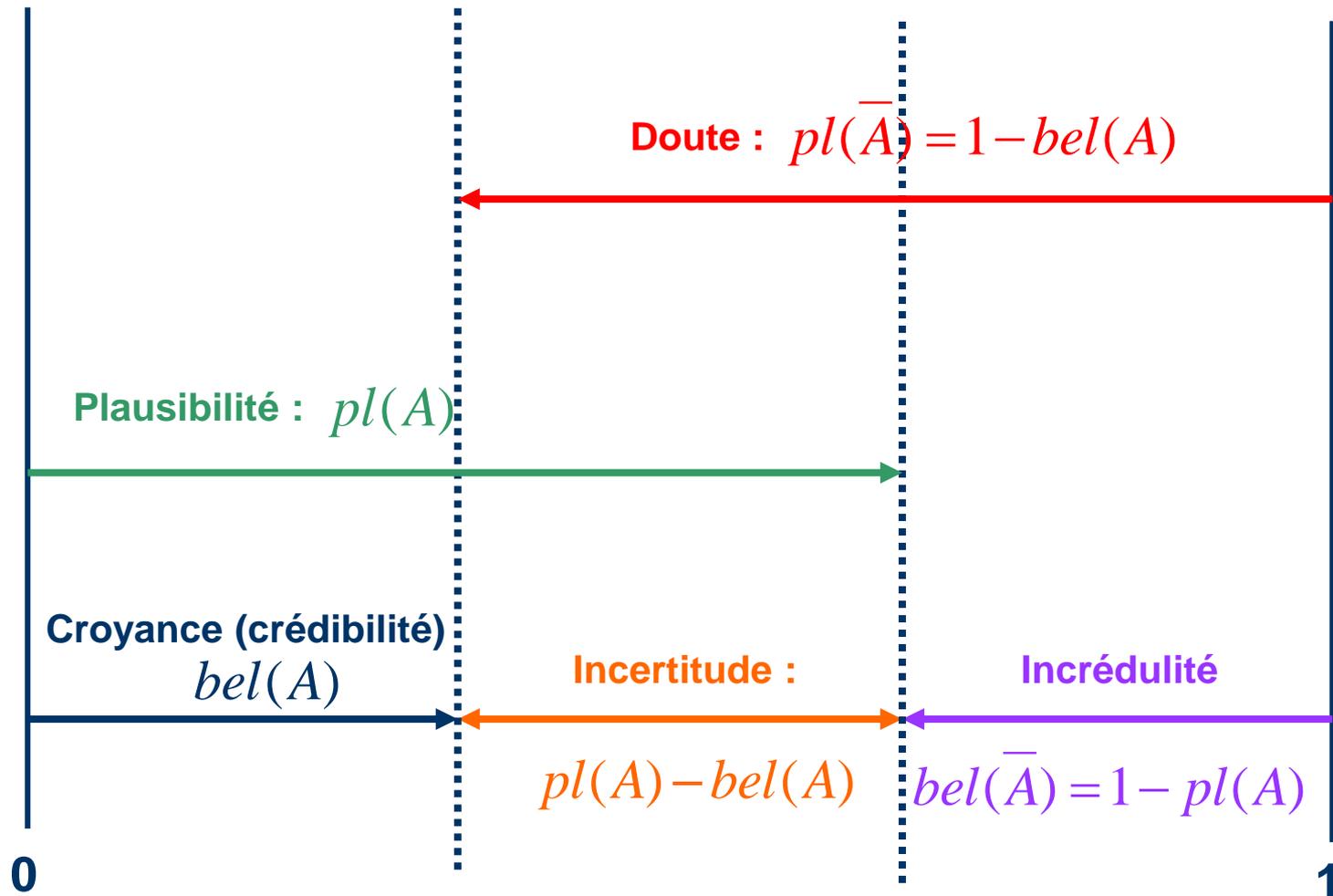
Problème : comment traduire un état de connaissance exprimé sur le référentiel Ω dans un référentiel Θ plus fin?

Solution la moins informative :

$$m^\Theta(f(A)) = m^\Omega(A) \quad \forall A \subseteq \Omega$$

Fonctions de croyance et mesures floues

Intervalle d'évidence d'un ensemble A



Quelques exemples d'utilisation de la théorie de l'évidence

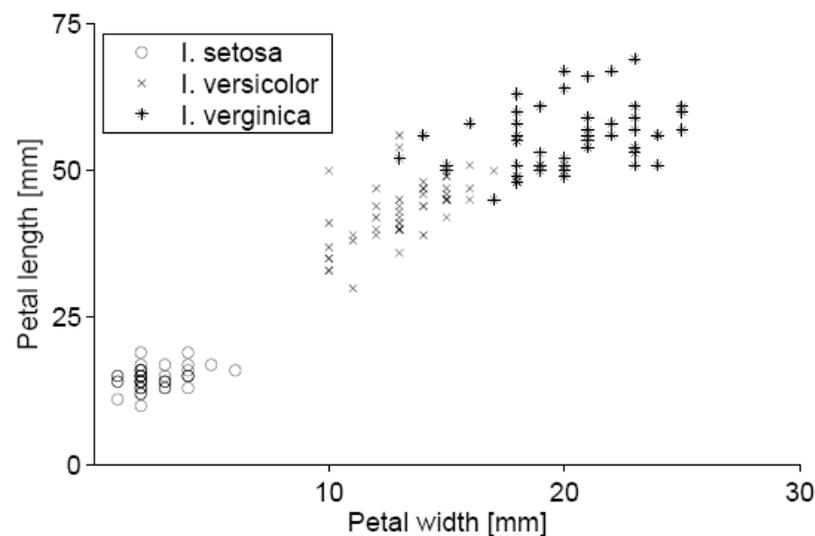
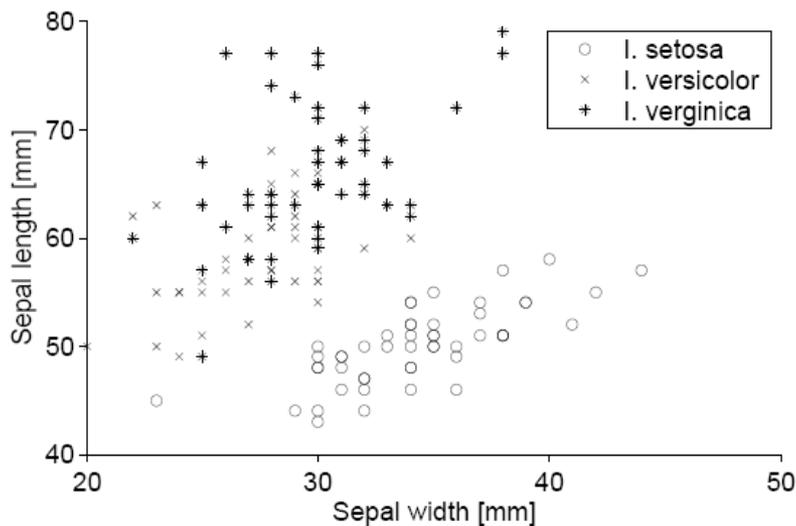
*Approche
crédibiliste*

Classification crédibiliste des IRIS (Denœux)

Jeu de données « Iris » de Fisher

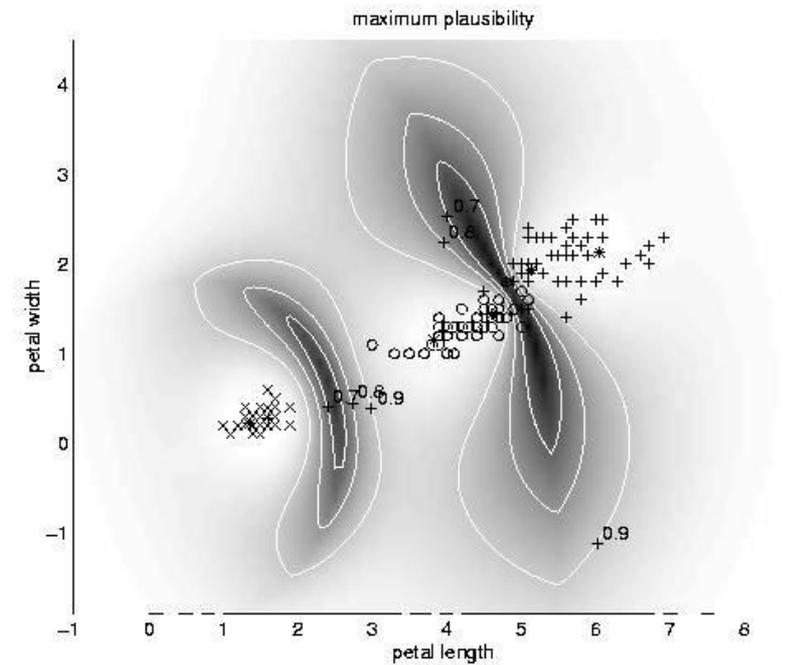
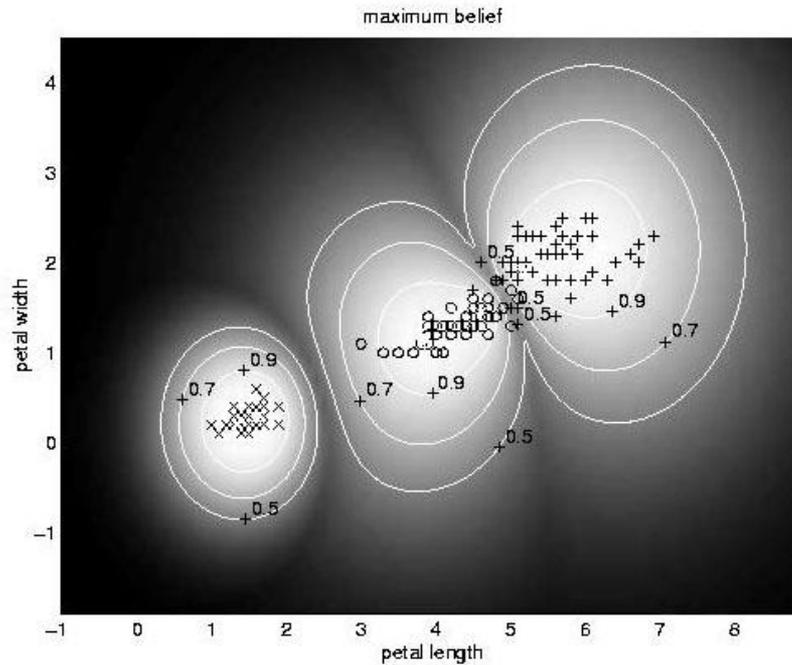
3 classes : $\Omega = \{\text{Setosa}, \text{Versicolor}, \text{Virginica}\}$

4 caractéristiques : longueur sépal, largeur sépal, longueur pétal, largeur pétal



Classification crédibiliste des IRIS (Denœux)

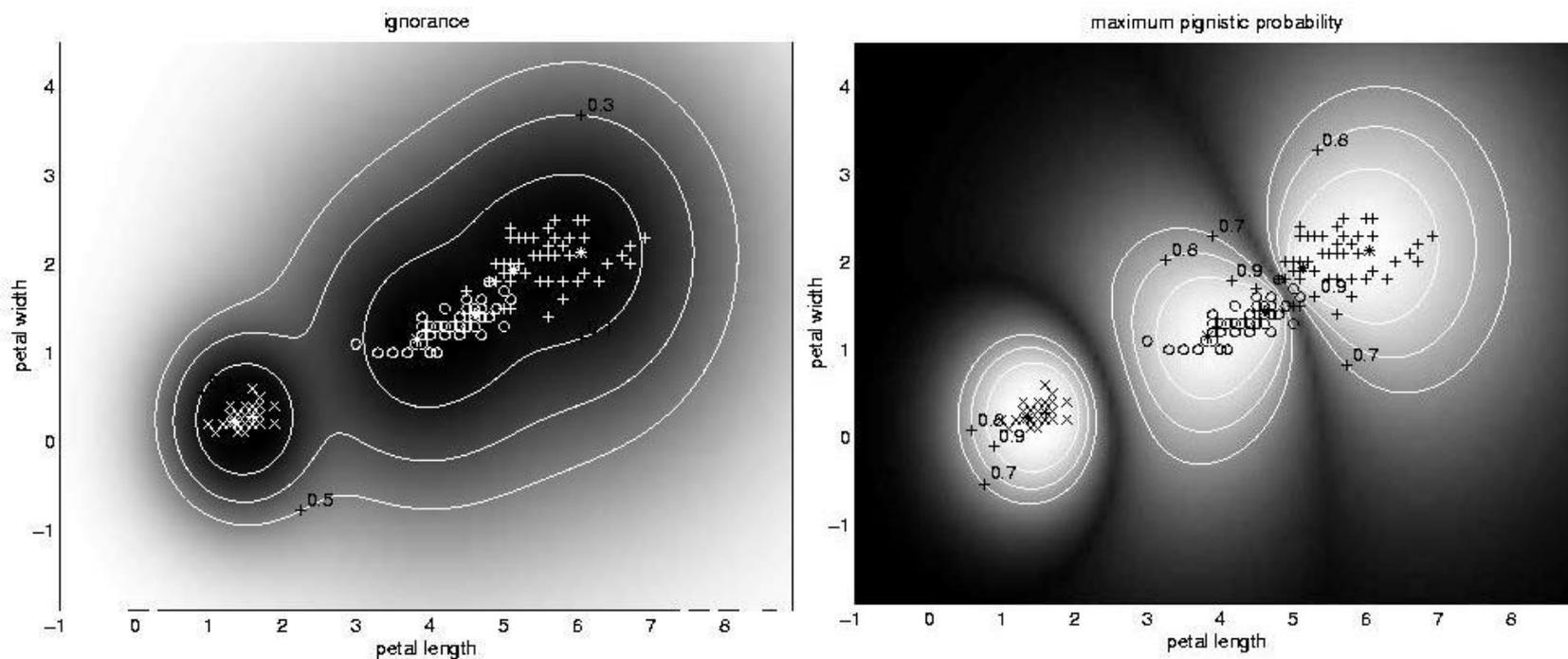
bel et pl



Approche
crédibiliste

Classification crédibiliste des IRIS (Denœux)

Masse d'ignorance et BetP

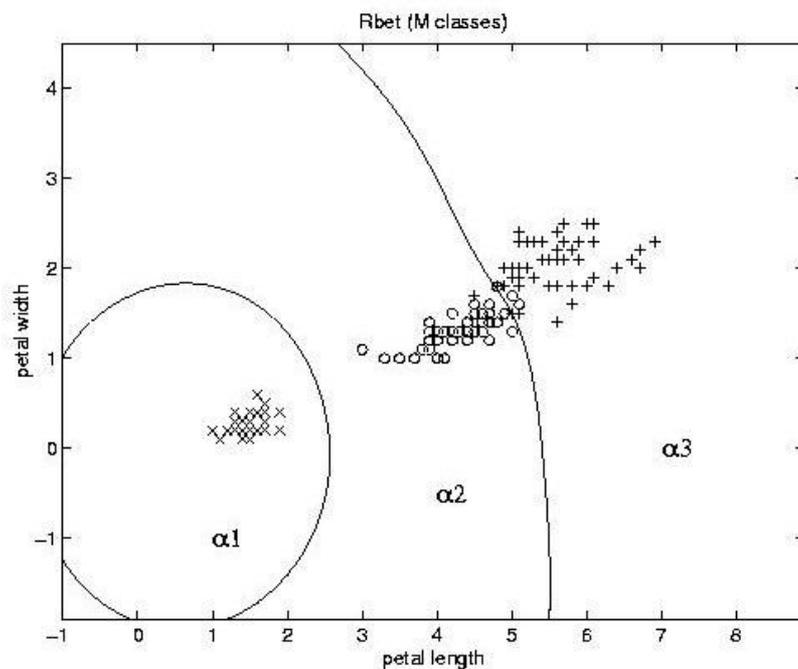


Approche
crédibiliste



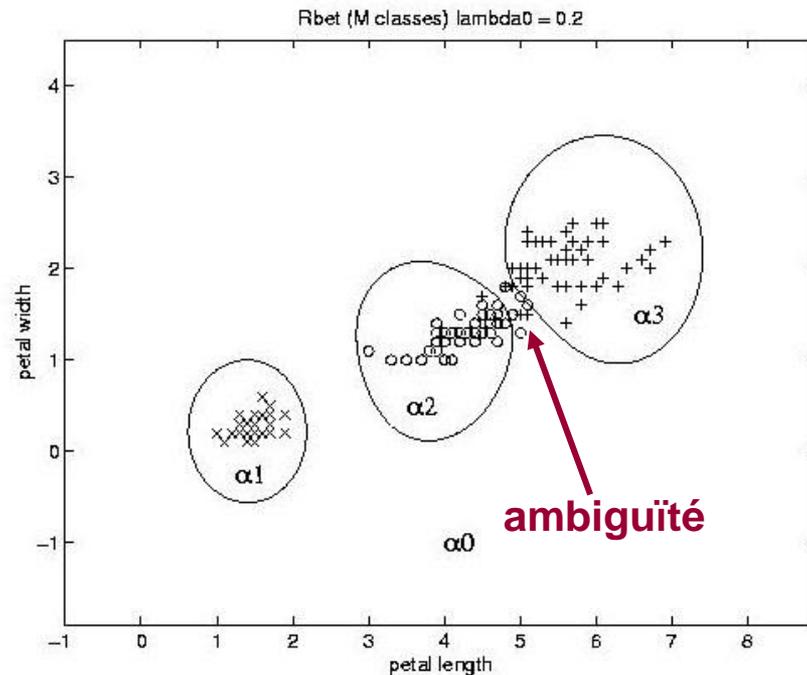
Classification crédibiliste des IRIS (Denœux)

Frontières de décision



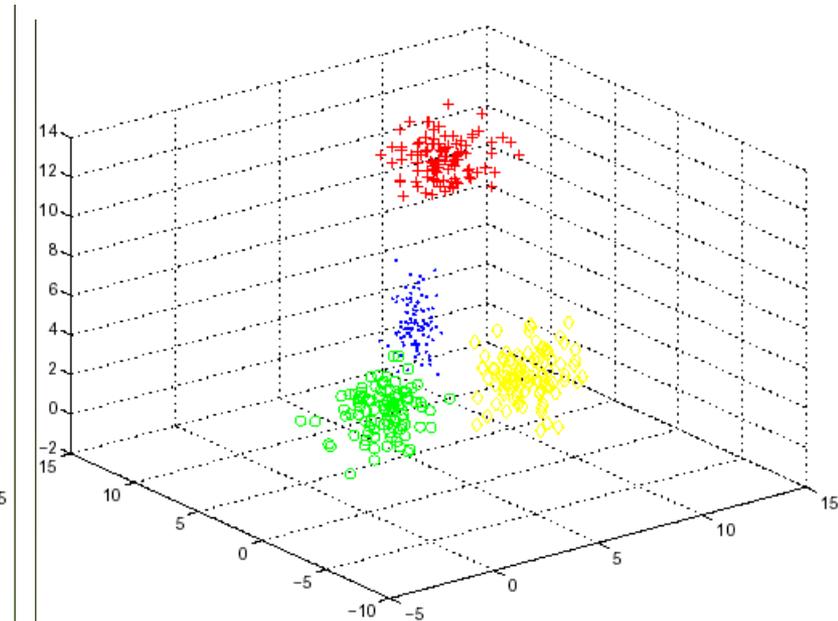
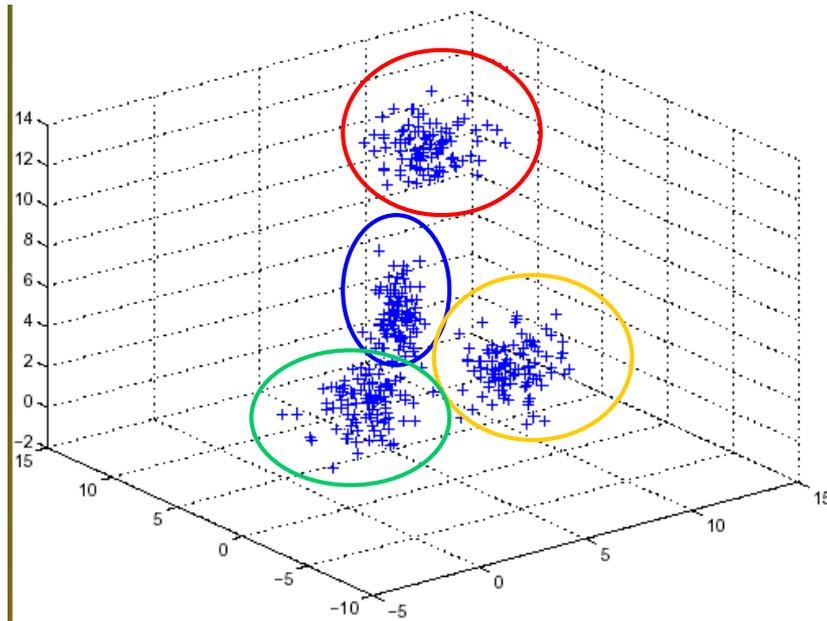
Sans rejet

Risque pignistique

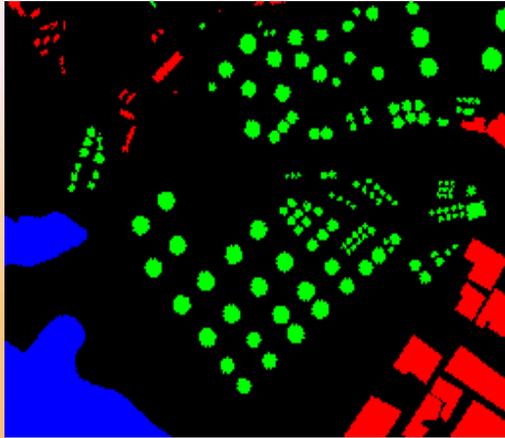


Avec rejet

4 classes gaussiennes dans un espace à 3 dimensions



Big Brother is watching you!



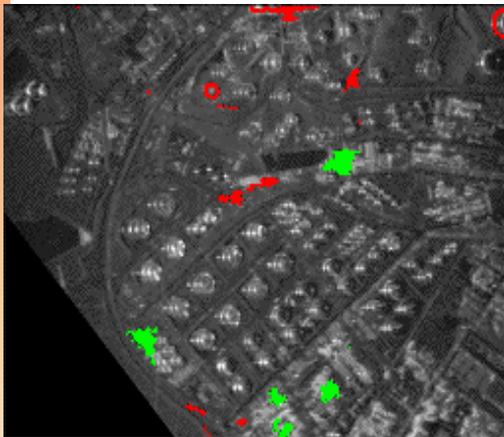
Plan 1958



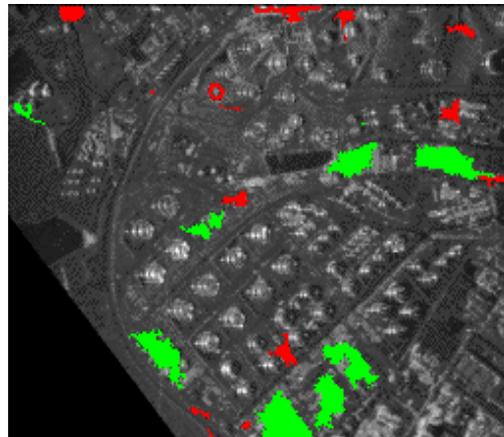
Image optique 1992



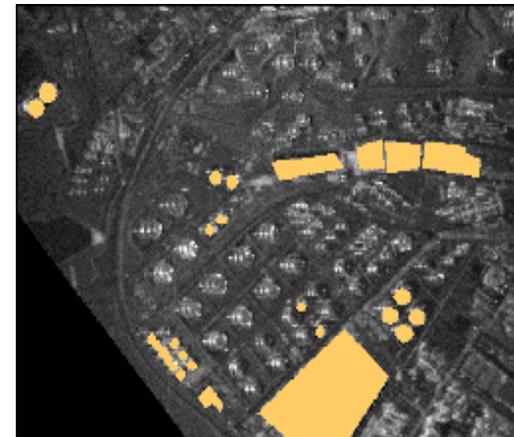
Image radar 1992



Fusion probabiliste
(Bayes + MAP)



Fusion évidentielle



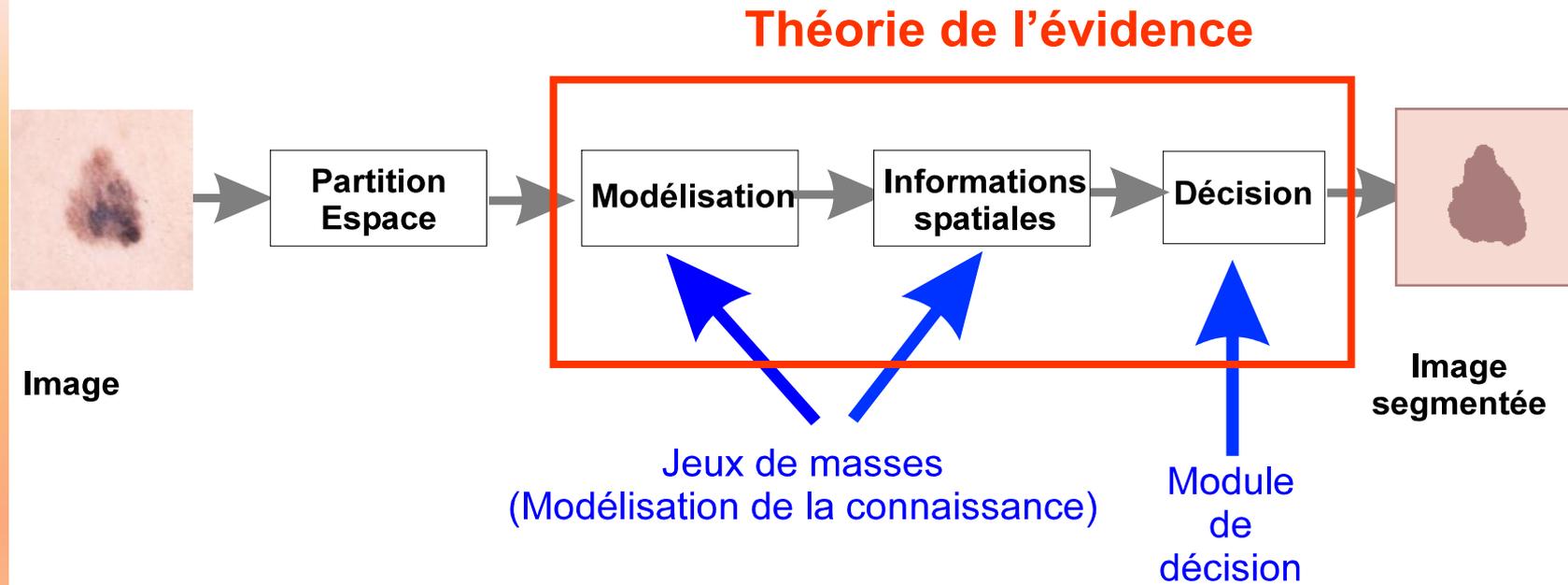
Vérité terrain 1992

ONERA

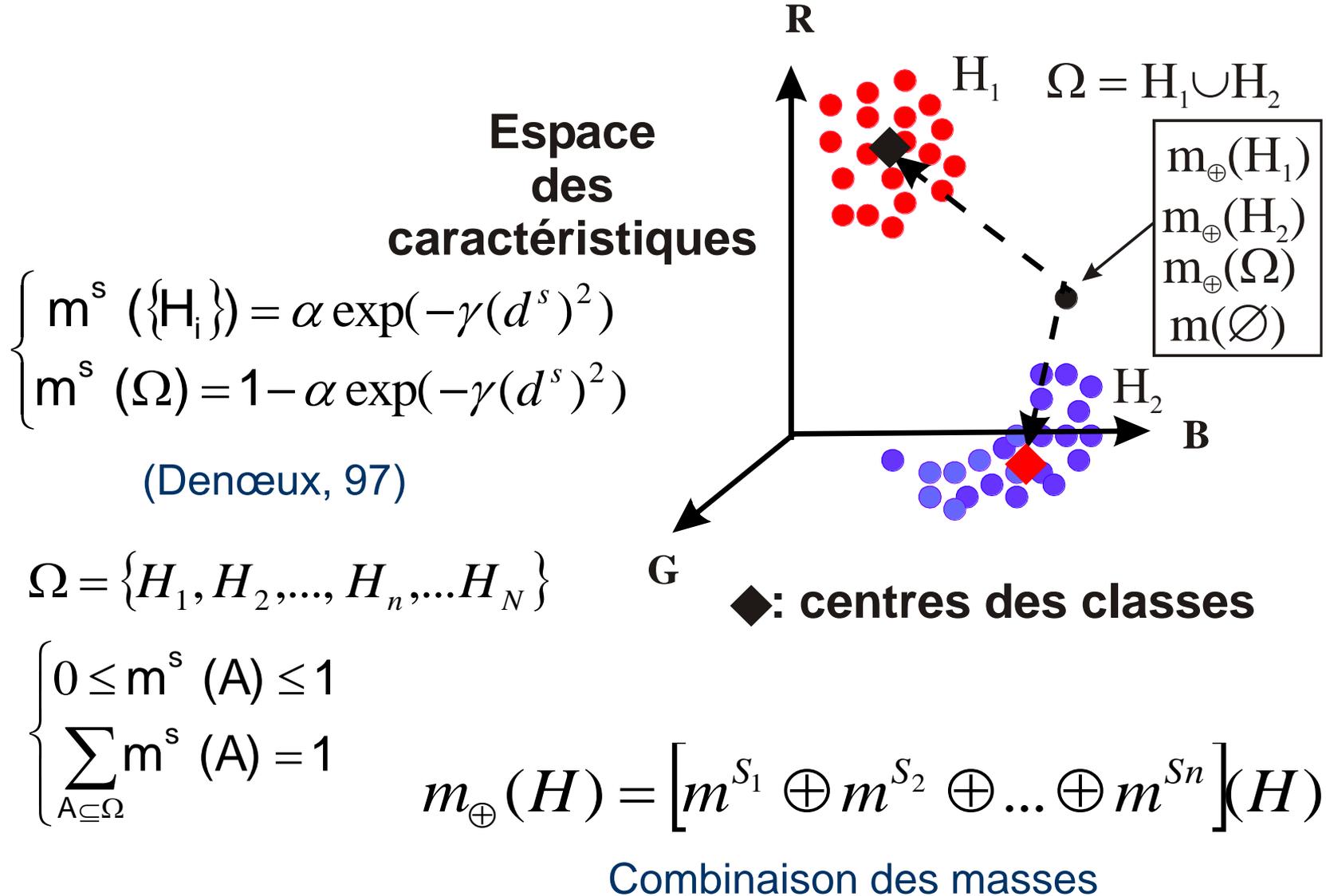
*Approche
crédibiliste*



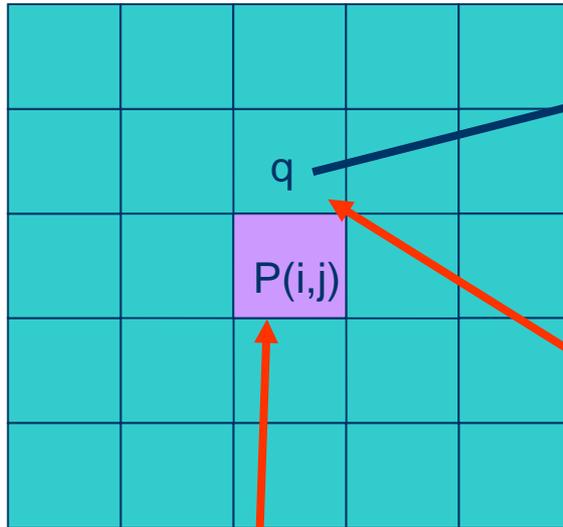
Segmentation d'images couleur



Segmentation d'images couleur



Segmentation d'images couleur



Chaque voisin q de $P(i,j)$ est considéré comme une source d'information S_q

$$m_{\alpha_q S_q}(H_n) = \alpha_q m_{S_q}(H_n)$$

$$m_{\oplus} = m \oplus m_{\alpha S_1} \oplus m_{\alpha S_2} \oplus \dots \oplus m_{\alpha S_q} \oplus \dots \oplus m_{\alpha S_Q}$$

$$\alpha_q = \exp(-(d^{S_q})^2)$$

Masse affaiblie par un coefficient dépendant de la distance entre le pixel considéré et un de ses voisins

Segmentation d'images couleur

$$\text{Bet}P(H_n) = \sum_{A \subseteq \Omega, A \neq \emptyset} m_{\oplus}(A) \frac{|H_n \cap A|}{|A|}$$

$|A|$: cardinal de l'ensemble A

Décision: H_n décidée si $\text{Bet}P(H_n)$ maximum

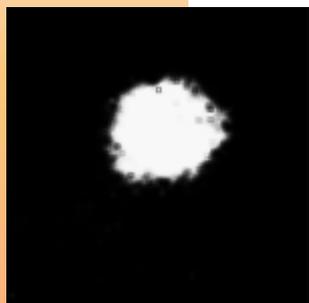
Remarque: on peut aussi faire du rejet

- ➡ Risque pignistique
- ➡ Risque inférieur (plausibilité)

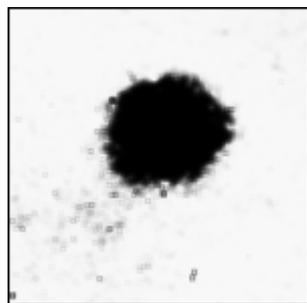
Segmentation d'images couleur



Image originale



Masses lésion



Masses peau

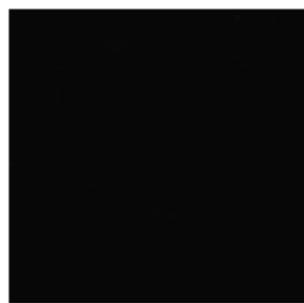
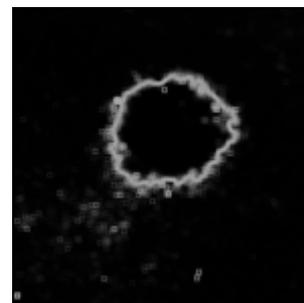
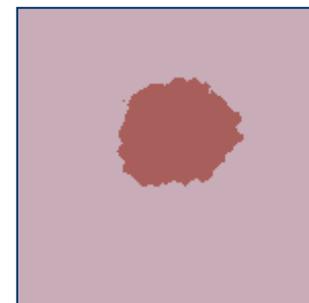
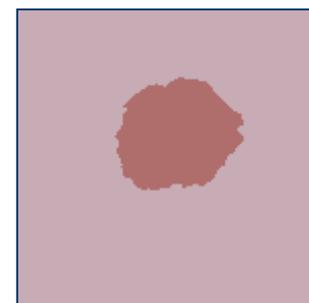
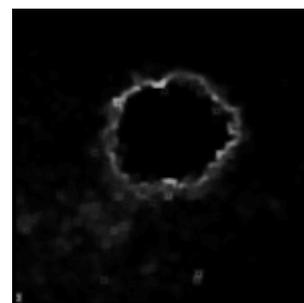
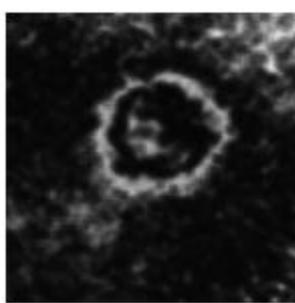
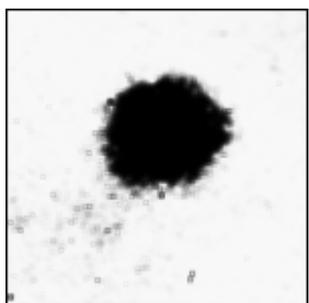
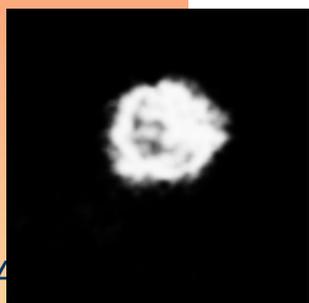
Masses Ω Masses \emptyset 

Image segmentée



A
crédibiliste



$m(A)=0$

$m(A)=1$

Segmentation d'images couleur



Image originale



Masses lésion



Masses peau

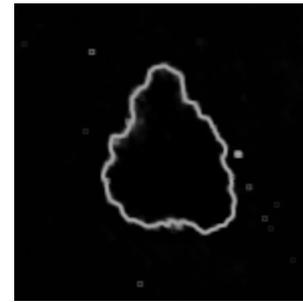
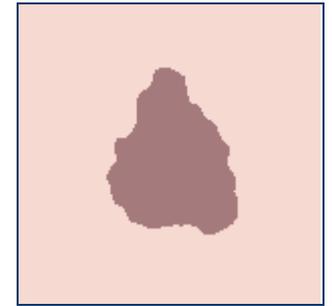
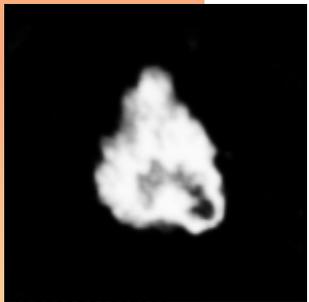
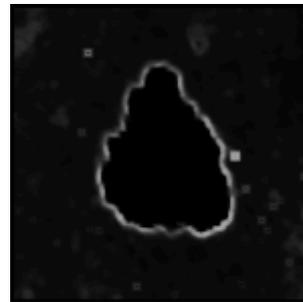
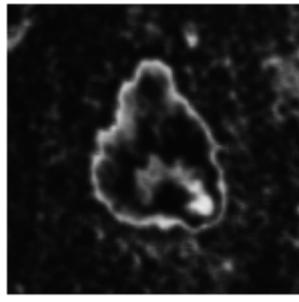
Masses Ω Masses \emptyset 

Image segmentée



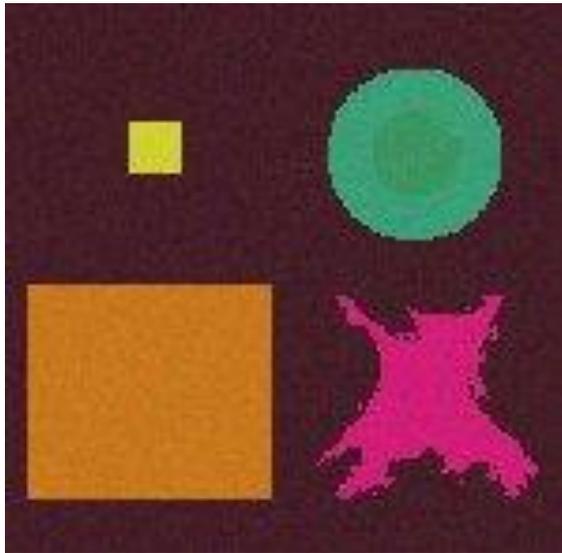
Approche
crédibiliste



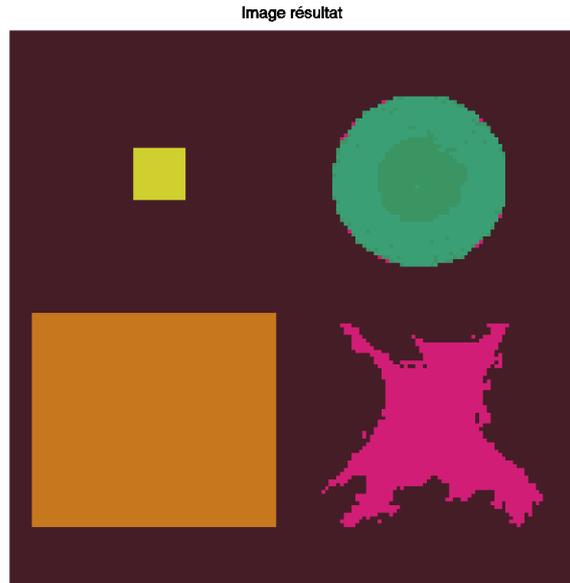
$m(A)=0$

$m(A)=1$

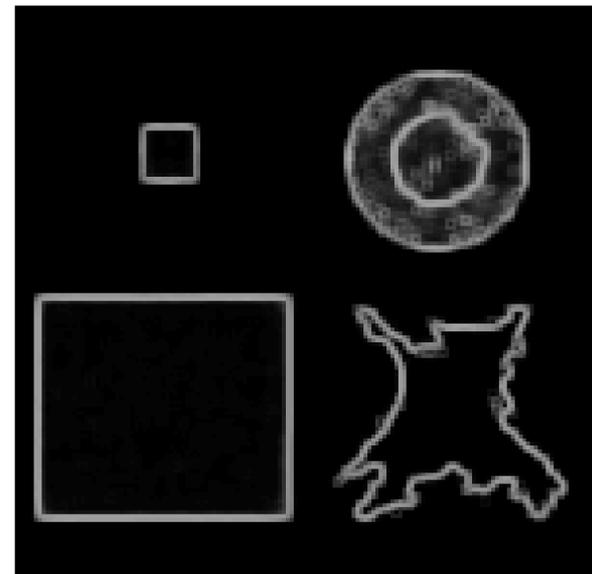
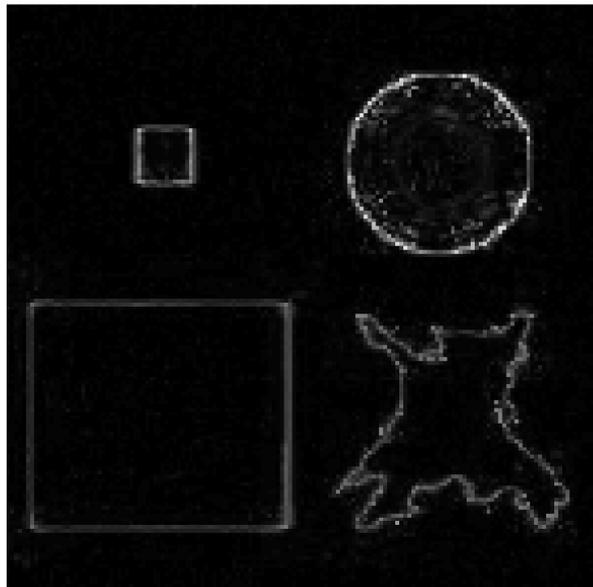
Segmentation d'images couleur



Masse Theta

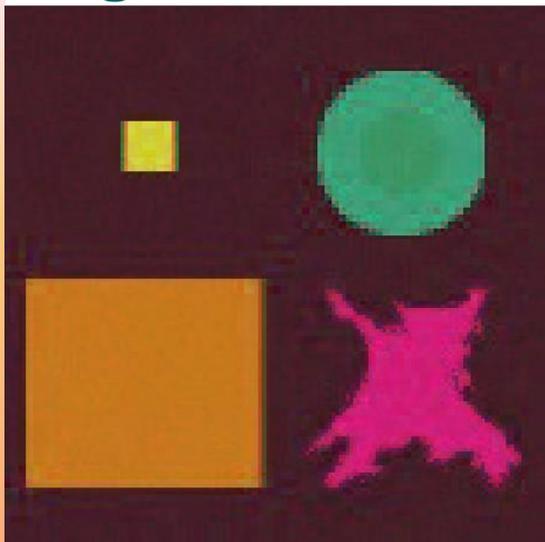


Masse Emptyset avec information spatiale



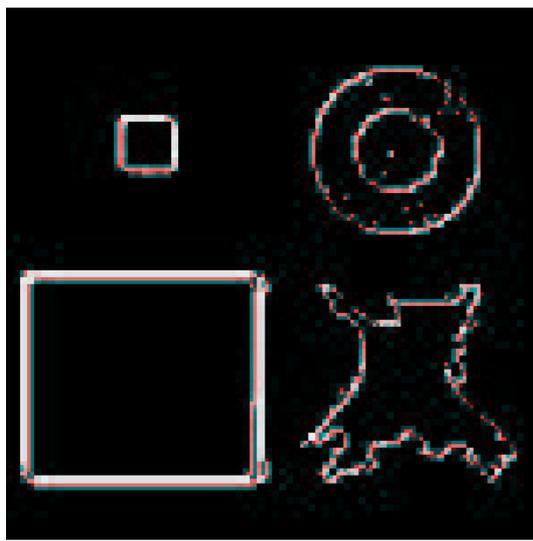
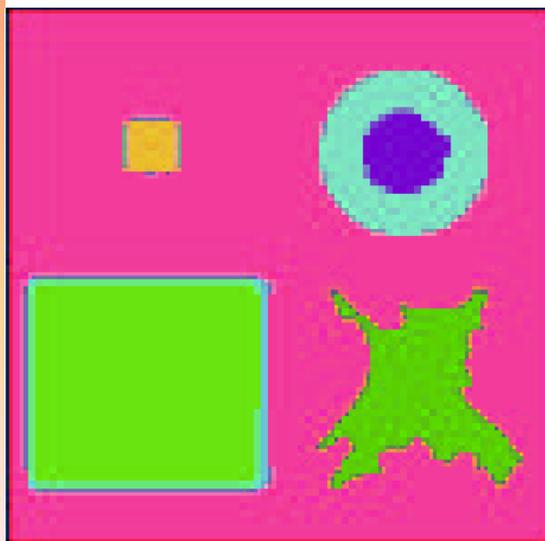
Segmentation d'images couleur

Segmentation couleur



Principe

- Convolution de l'image I par un filtre
- Tenir compte du voisinage du pixel P
- Pixels P_i de couleur C_k dans le voisinage du pixel P
- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k, \dots, \omega_K\}$
- Appartenance de P dans Ω
- Quantifier le degré de croyance
- A chaque P_i une fonction $m_i: m_i(\{\omega_k\}) = \alpha$ et $m_i(\Omega) = 1 - \alpha$
- $m = \oplus m_i$



Quantification d'images couleur



(a) original image



(b) $K = 256$



(c) $K = 128$



(d) $K = 64$



(e) $K = 32$

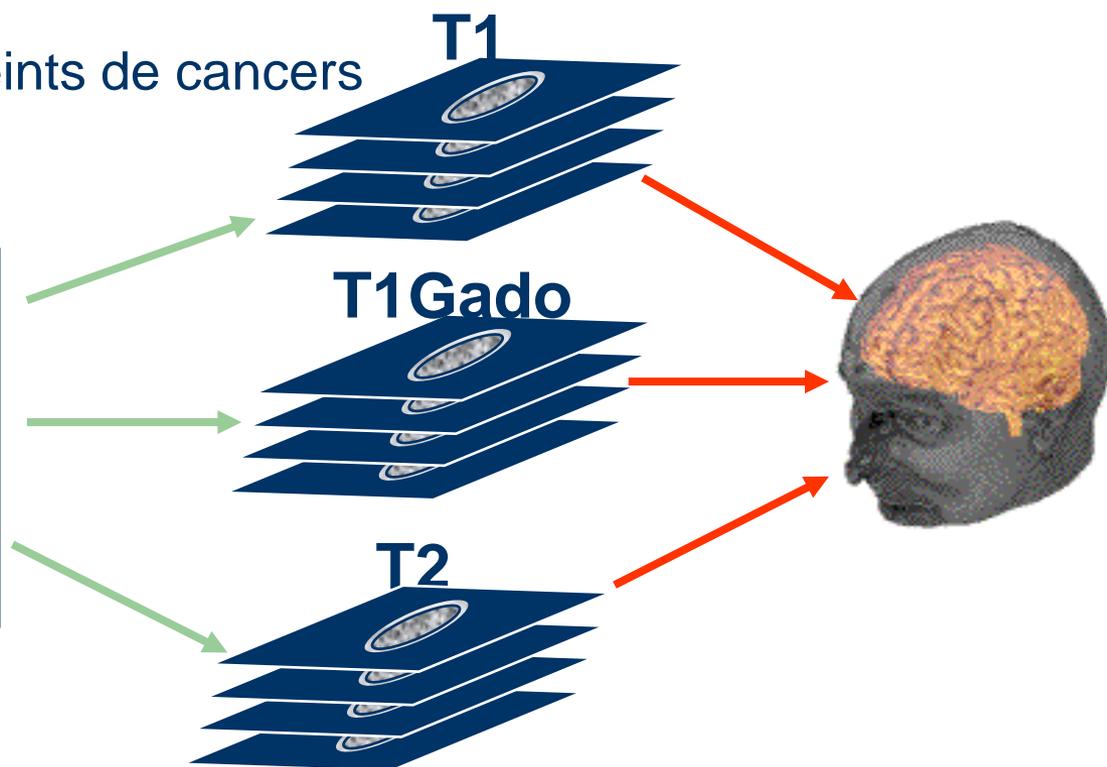
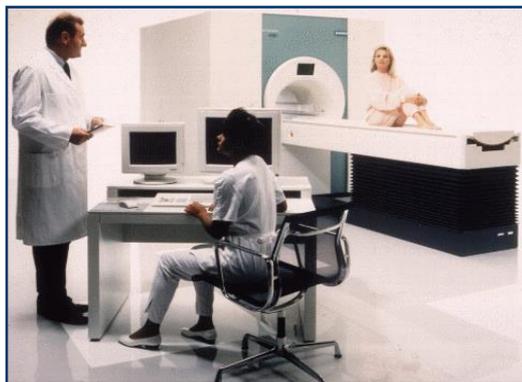


(f) $K = 16$

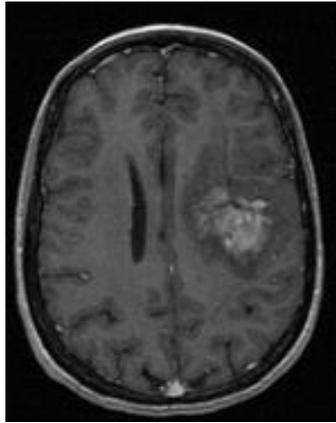
Segmentation de coupes IRM et reconstruction 3D

Contexte de l'étude

- Imagerie médicale
- Aide au diagnostic
- Suivi de patients atteints de cancers



Thèse de doctorat (A.-S. Capelle, décembre 2003)



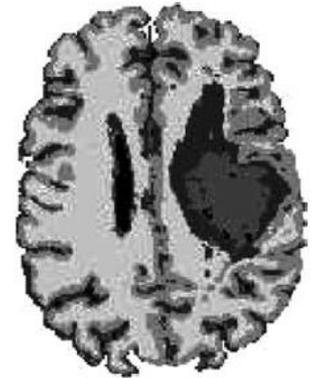
T1Gado



(a)

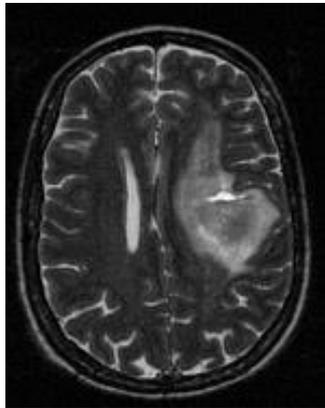


(b)

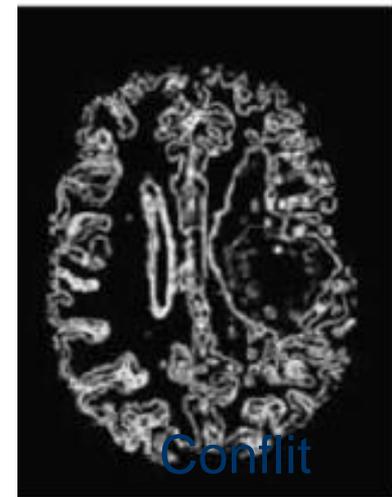


(c)

Segmentation par différents modèles

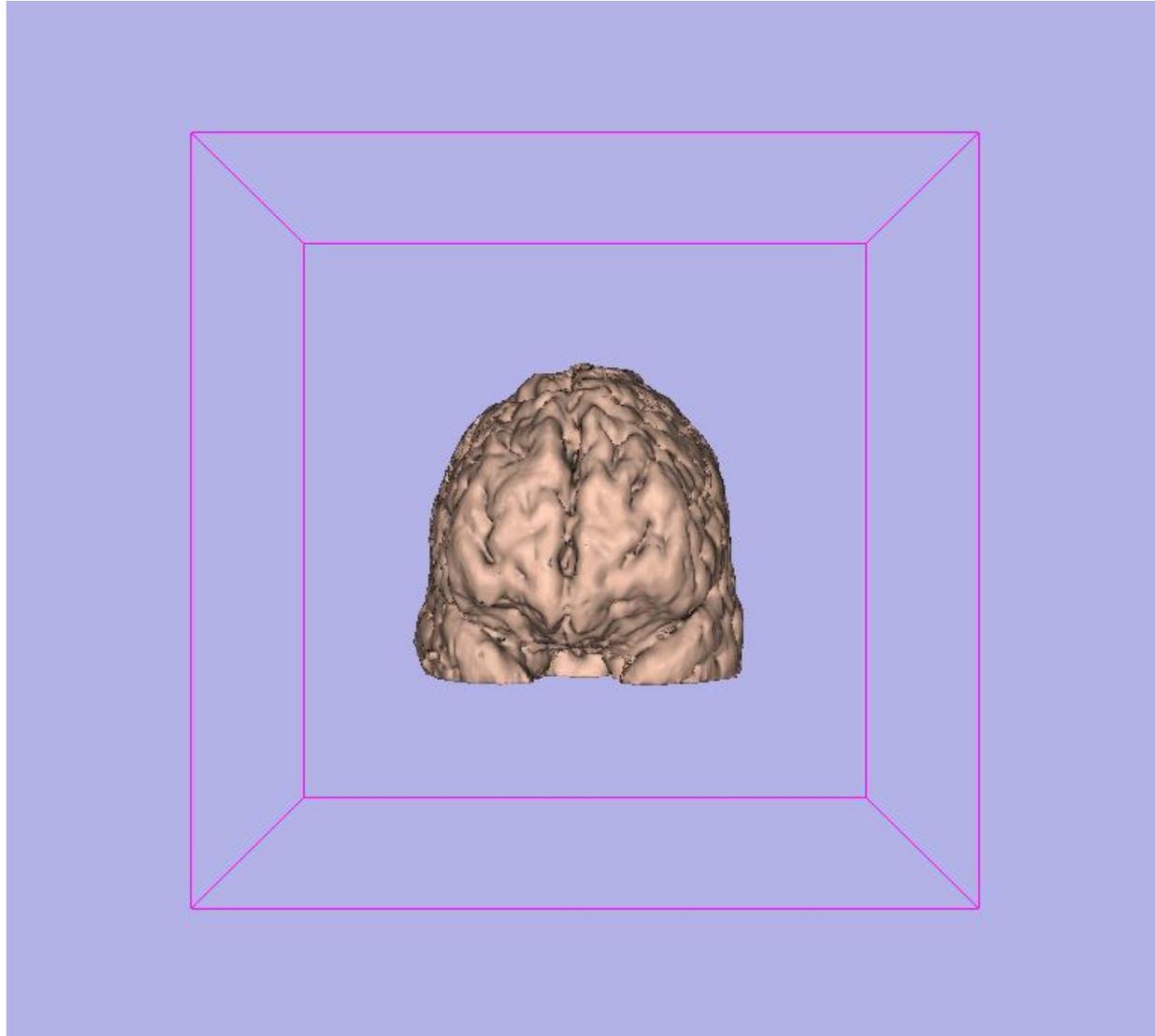


T2



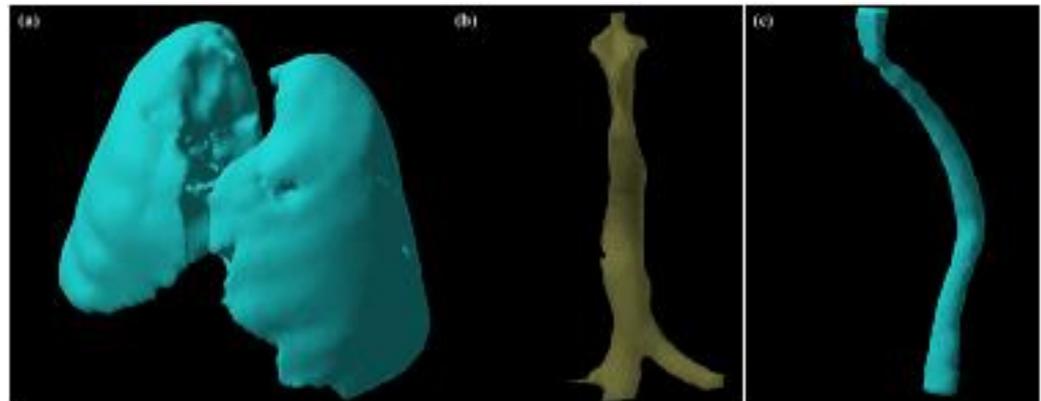
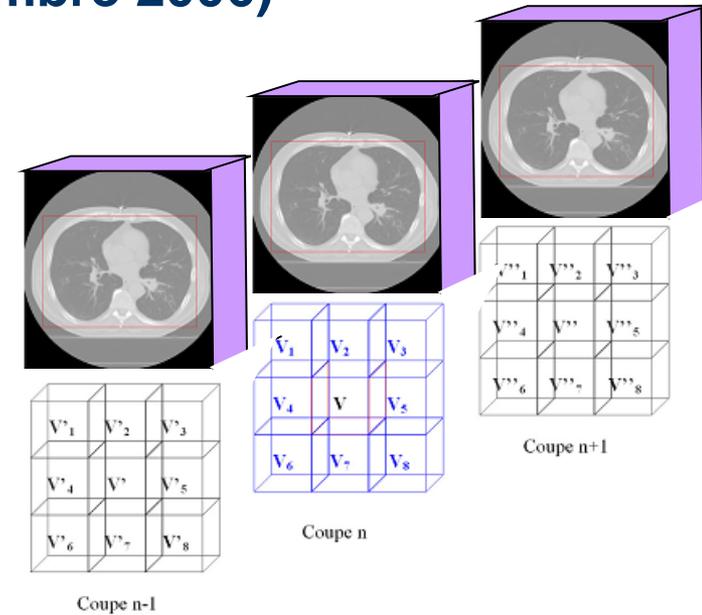
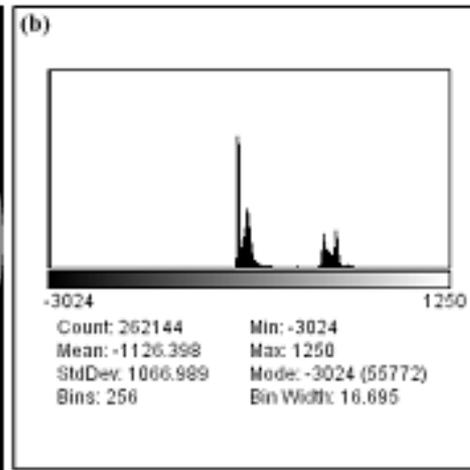
Conflit





*Approche
crédibiliste*

Thèse de doctorat (P. Zhang, novembre 2006)



Approche
crédibiliste

Détection d'obstacles (INRETS - LIVIC)

Objectif

- Aide à la conduite
- Détection d'obstacles à l'avant d'un véhicule instrumenté

Véhicule instrumenté

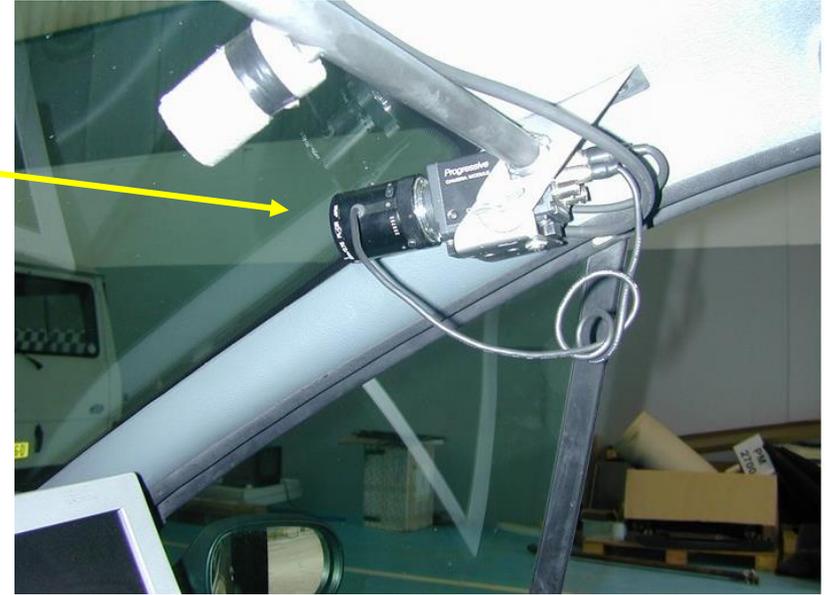
- ☞ Système multi-capteur (caméra, télémètre, lidar,...)
- ☞ Système de traitement

Système de traitement de l'information

- ☞ Données images et signal
- ☞ Fusion de données

Remarque: <http://www.inrets.fr/ur/livic/>

Détection d'obstacles (INRETS - LIVIC)



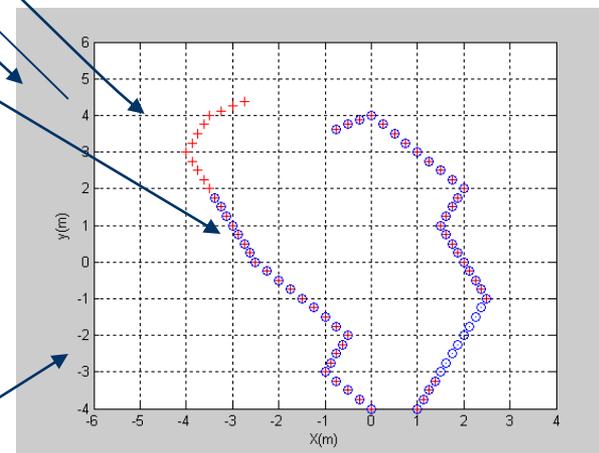
Approche
crédibiliste

Suivi multi-objets

Thèse de doctorat (N. Megherbi, décembre 2006)



Audio-video surveillance systems in transport environments



**Clean trajectories, o: video trajectory
+: audio trajectory
o: video trajectory**

Suivi multi-objets



People tracking in transport environments

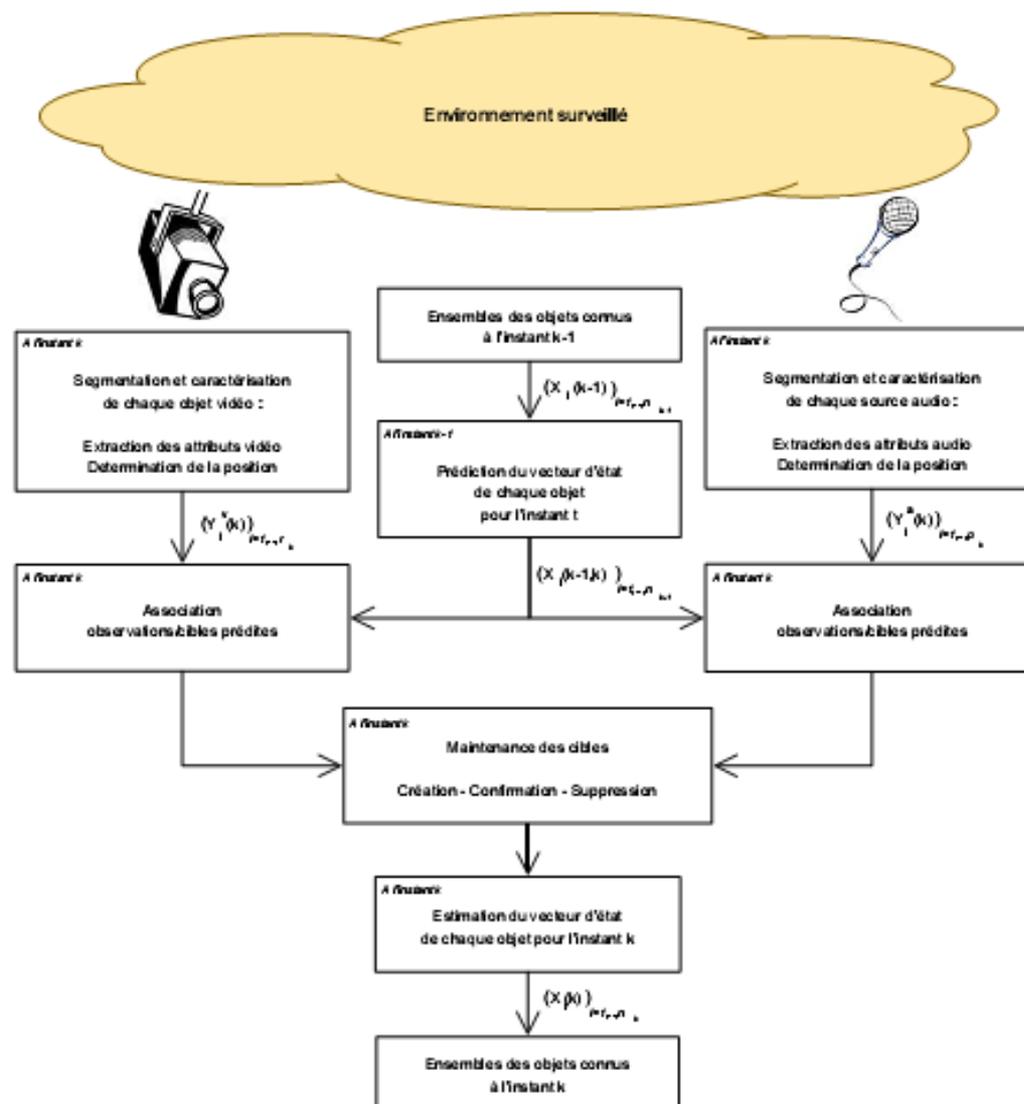
*Approche
crédibiliste*

Suivi multi-objets

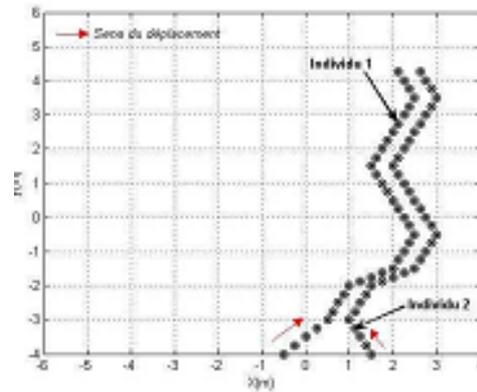


**Multi-sensor, Multi-object
tracking problem**

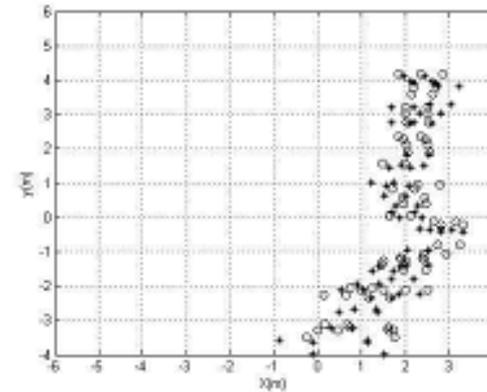
Suivi multi-objets



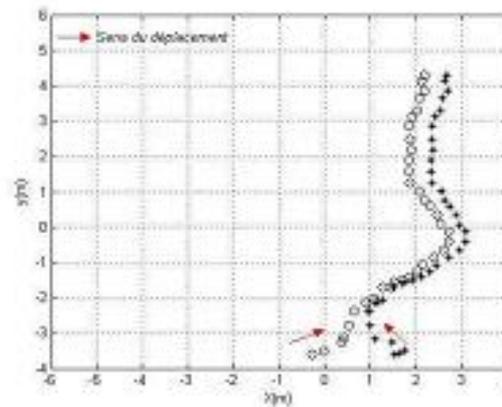
Suivi multi-objets



(a) Trajectoires réelles

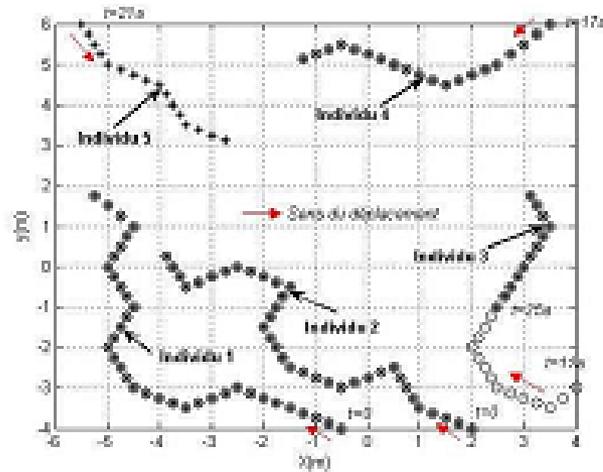


(b) Positions estimées par les deux capteurs logiques audio "*" et vidéo "o"

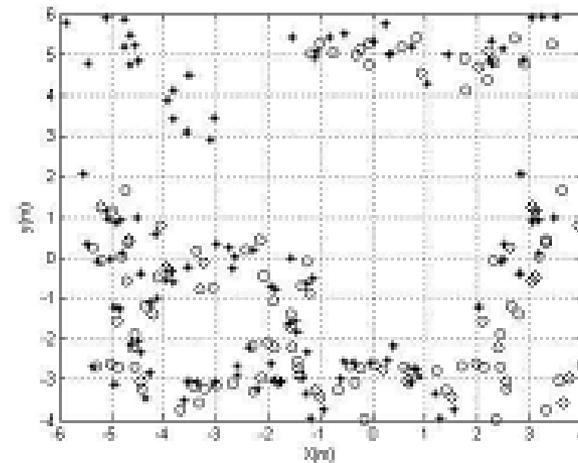


(c) Trajectoires estimées par notre méthode

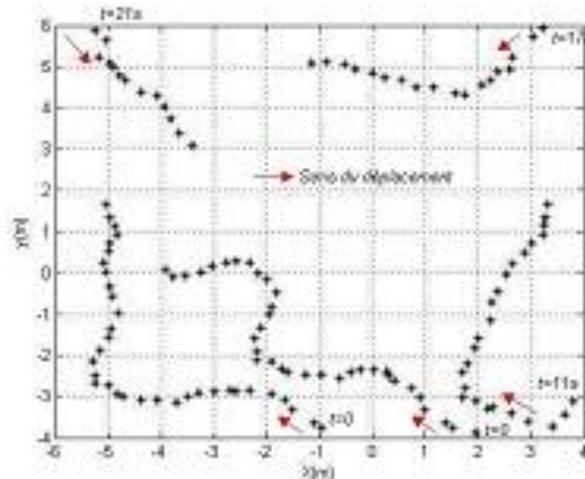
Suivi multi-objets



(a) Trajectoires réelles



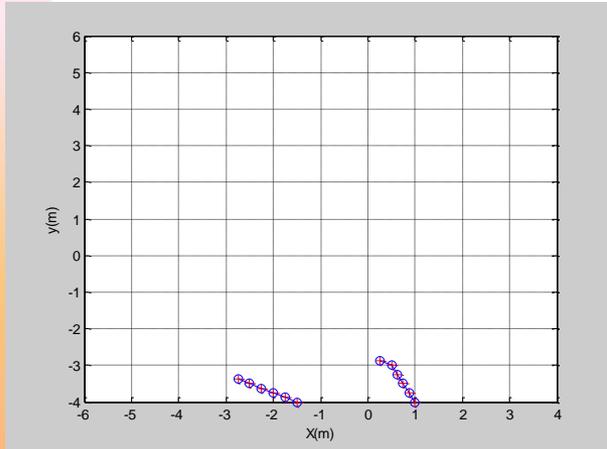
(b) Positions estimées par les deux capteurs locaux audio "+" et vidéo "o"



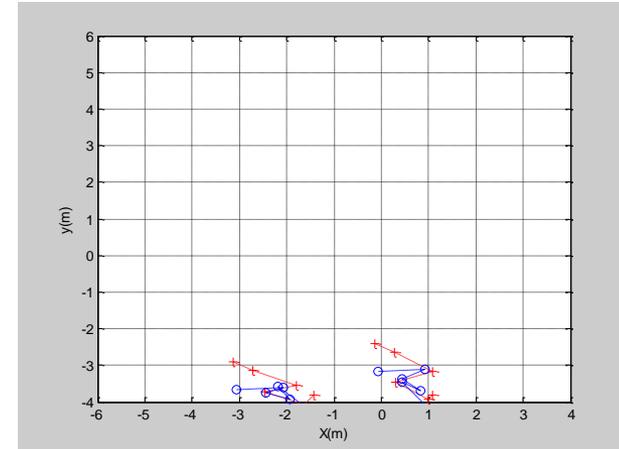
(c) Trajectoires estimées par notre méthode, mesure de performance d'association audio-cible

Suivi multi-objets

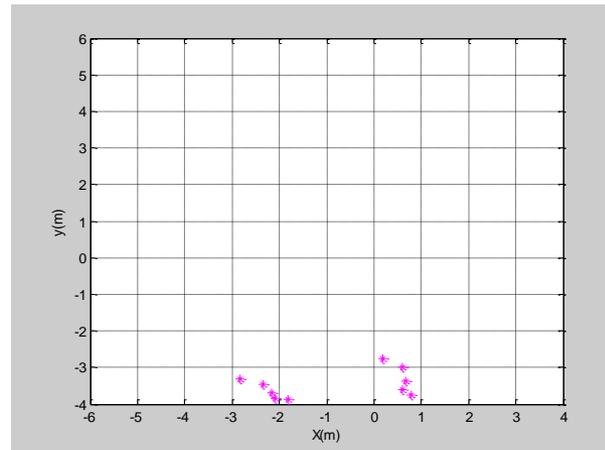
Target emergence



Clean trajectories



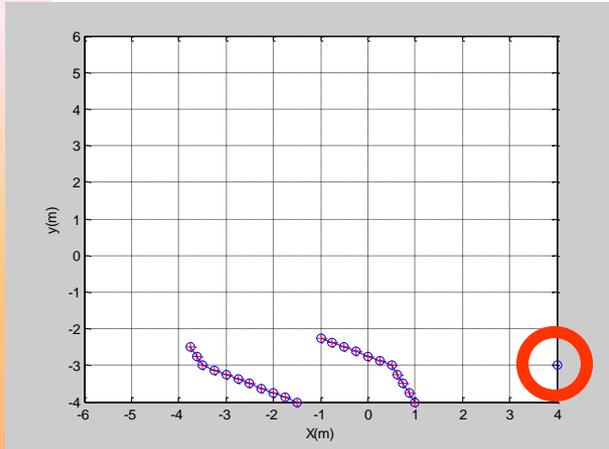
Noisy trajectories



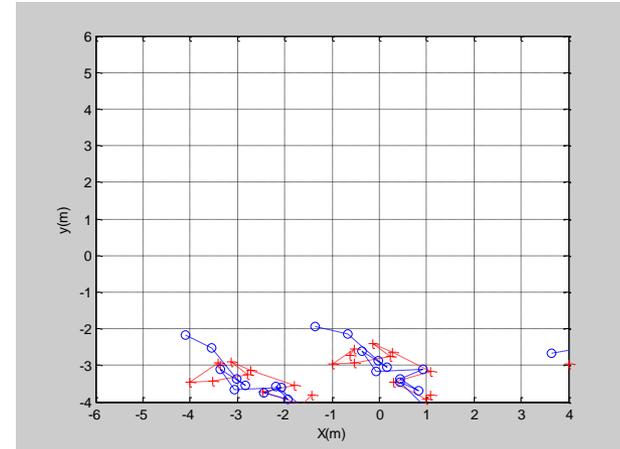
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

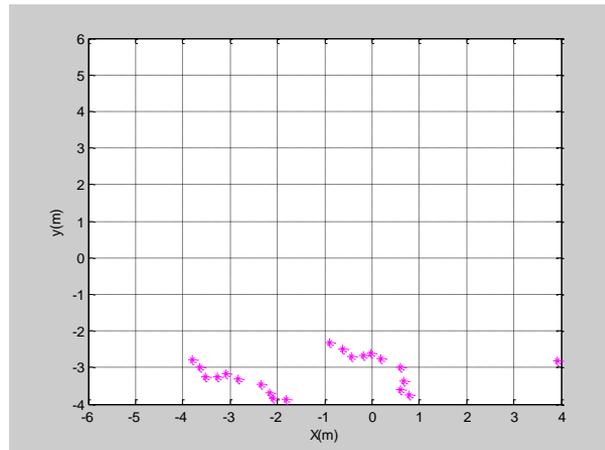
Target emergence



Clean trajectories



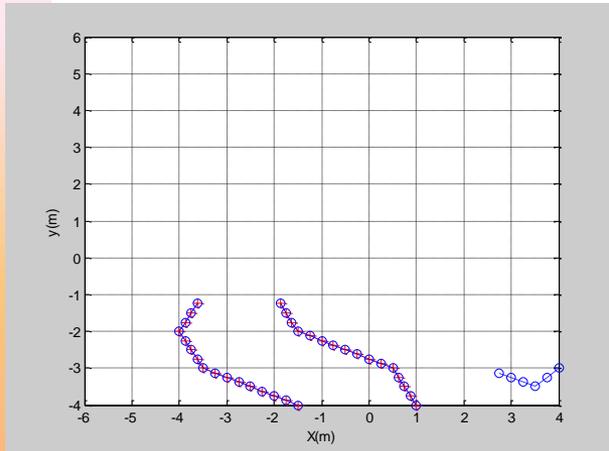
Noisy trajectories



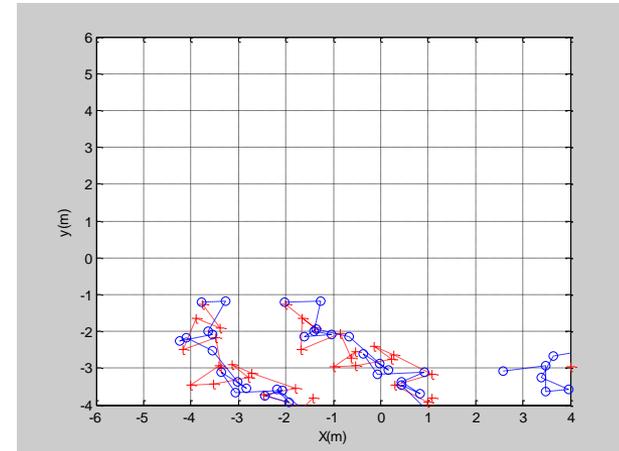
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

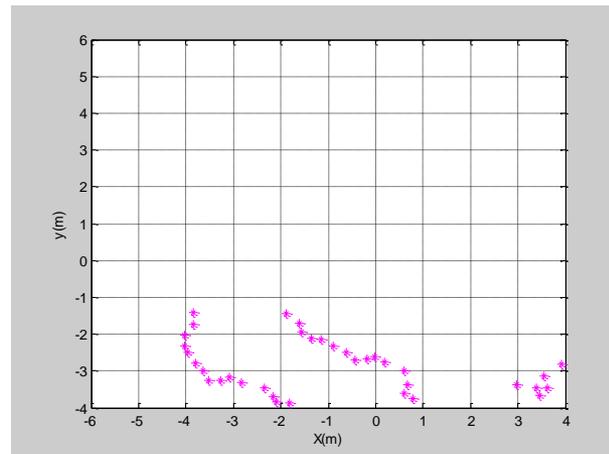
Target emergence



Clean trajectories



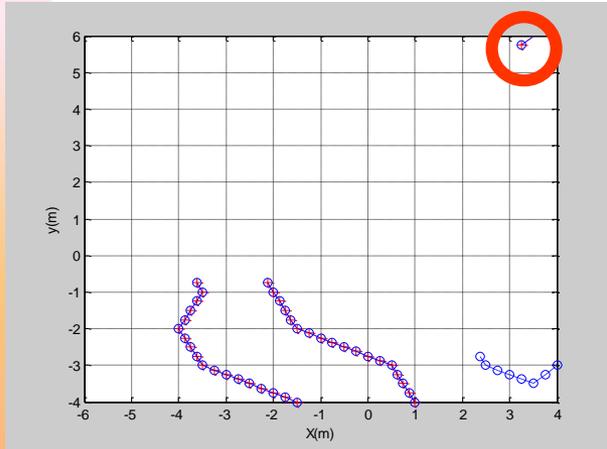
Noisy trajectories



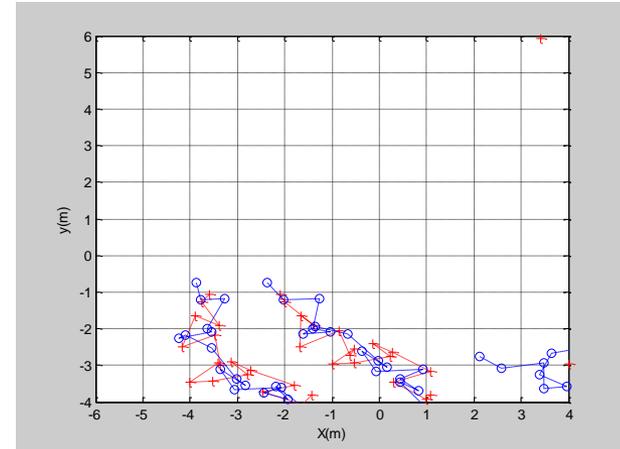
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

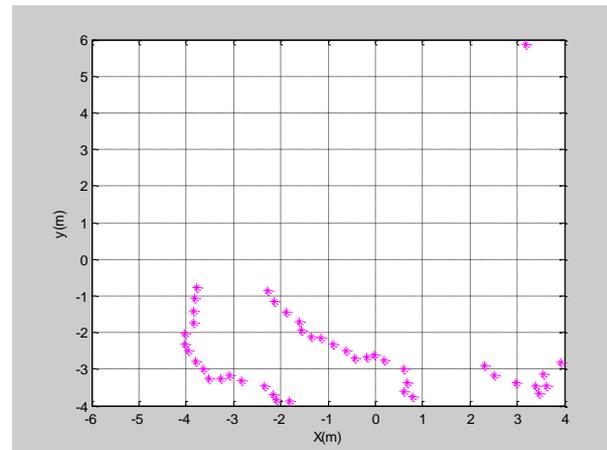
Target emergence



Clean trajectories



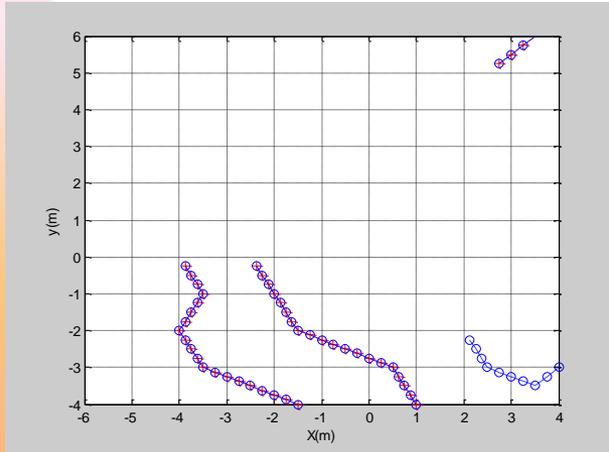
Noisy trajectories



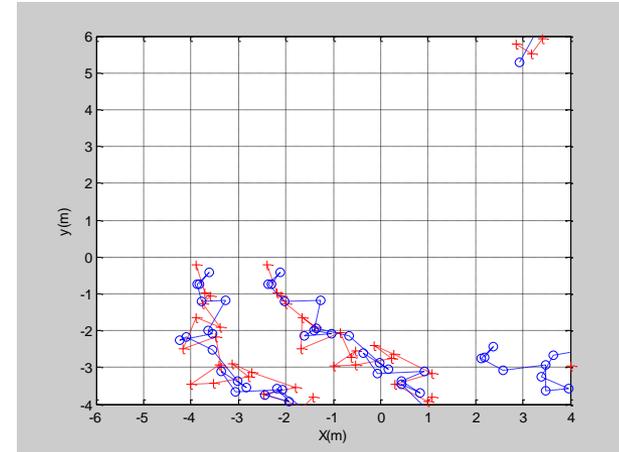
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

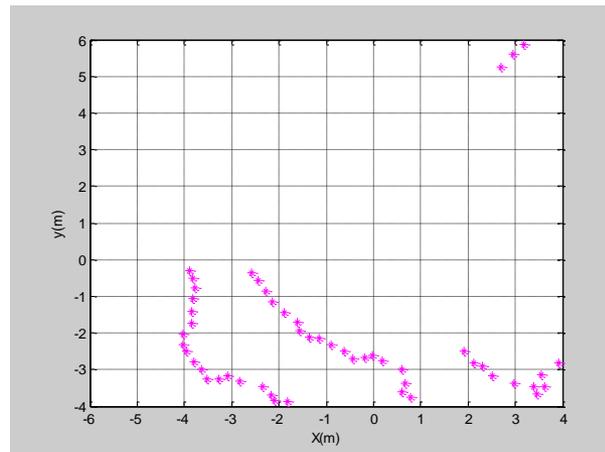
Target emergence



Clean trajectories



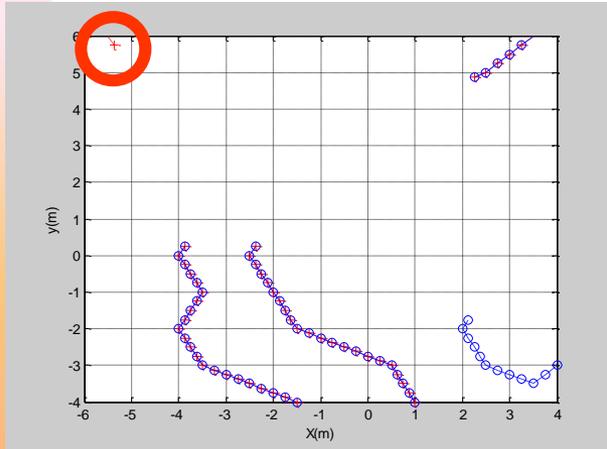
Noisy trajectories



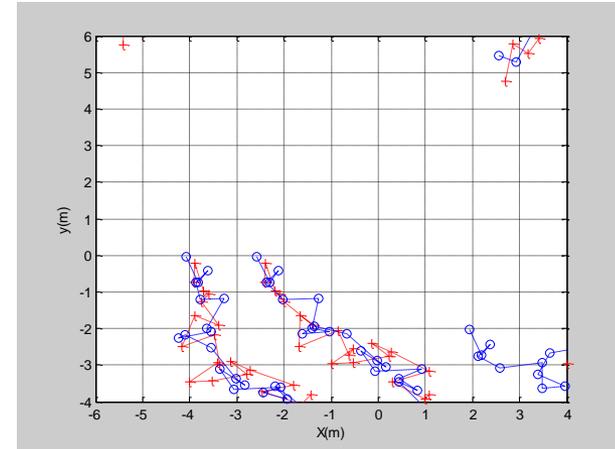
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

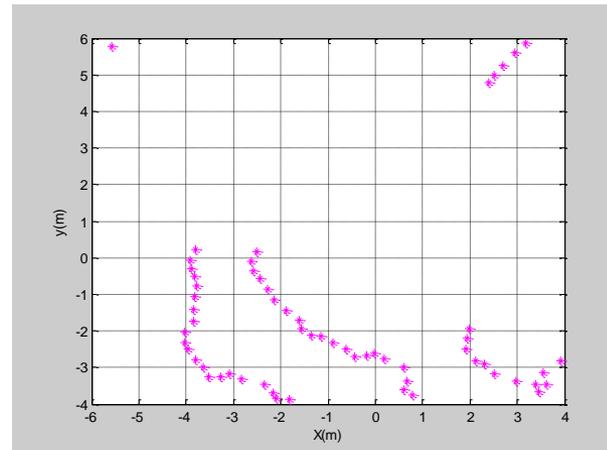
Target emergence



Clean trajectories



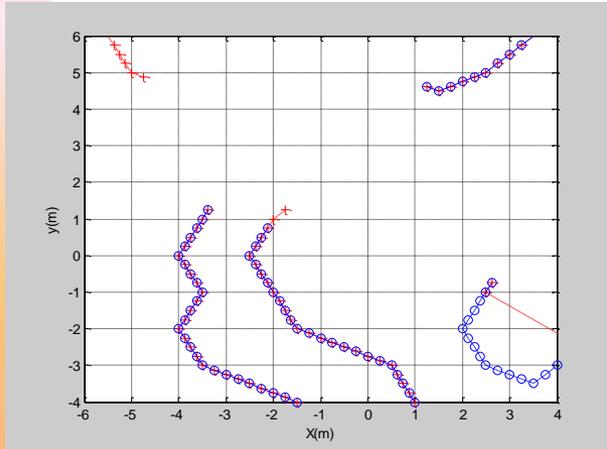
Noisy trajectories



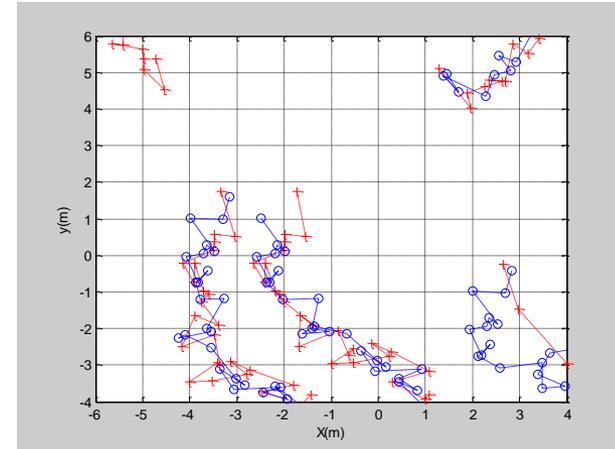
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

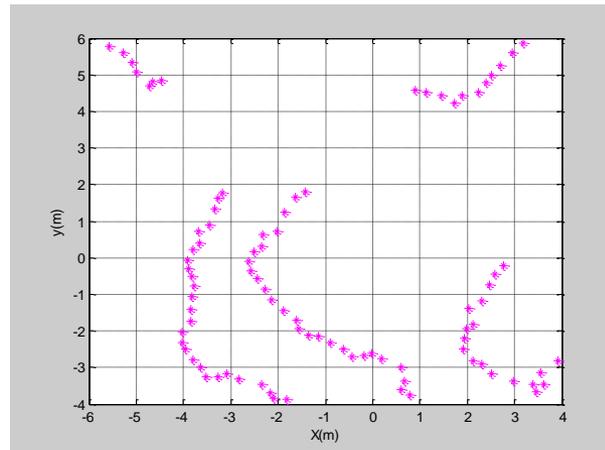
Target emergence



Clean trajectories



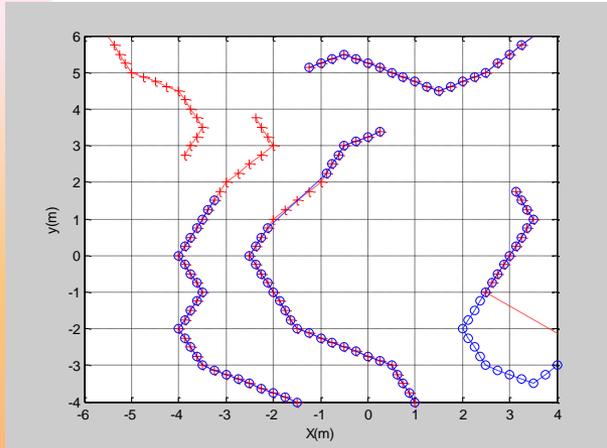
Noisy trajectories



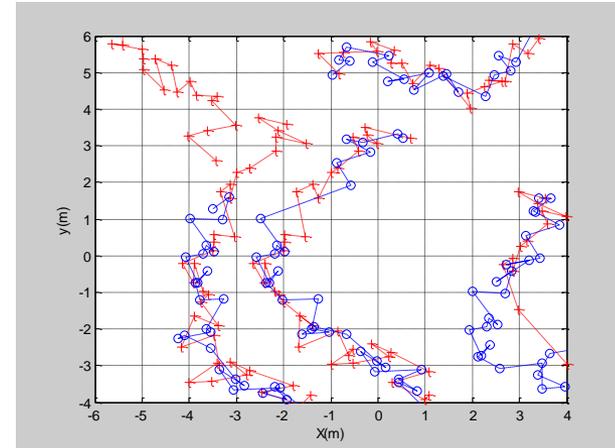
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

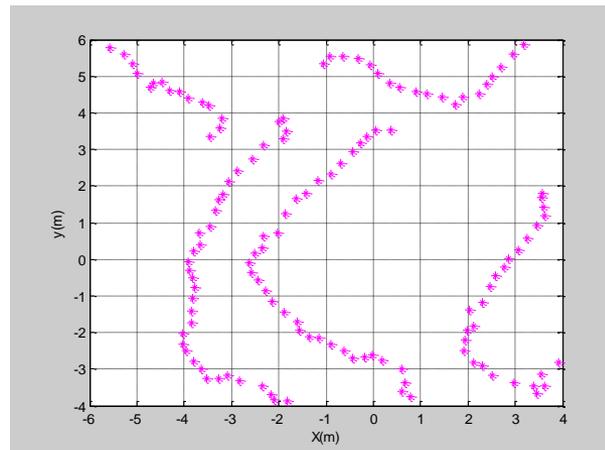
Target emergence



Clean trajectories



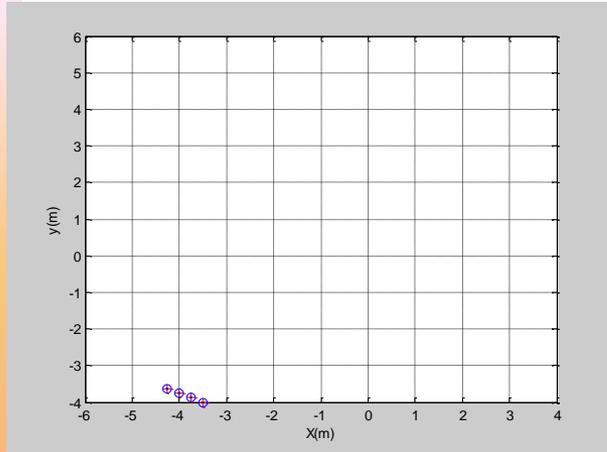
Noisy trajectories



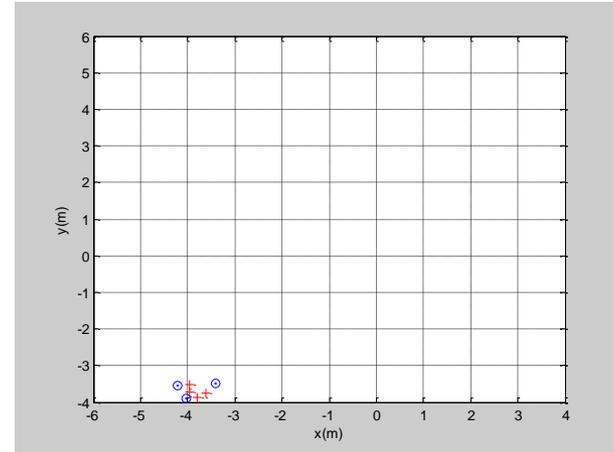
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

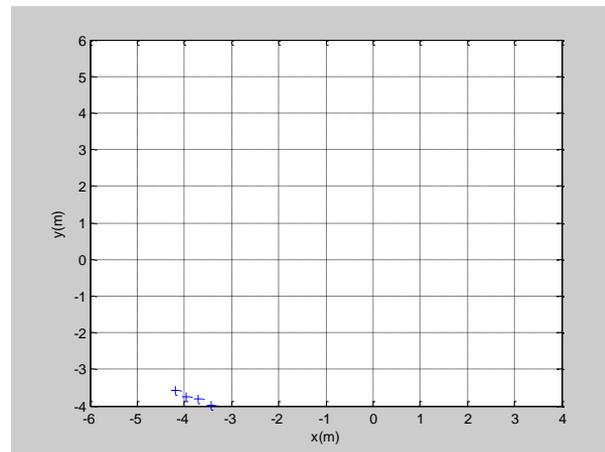
Target disappearance



Clean trajectories



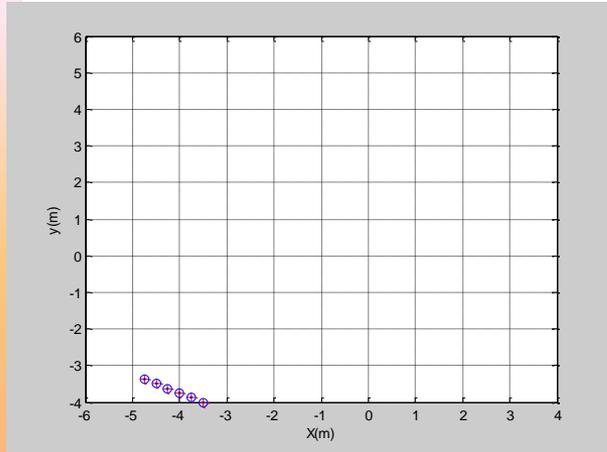
Noisy trajectories



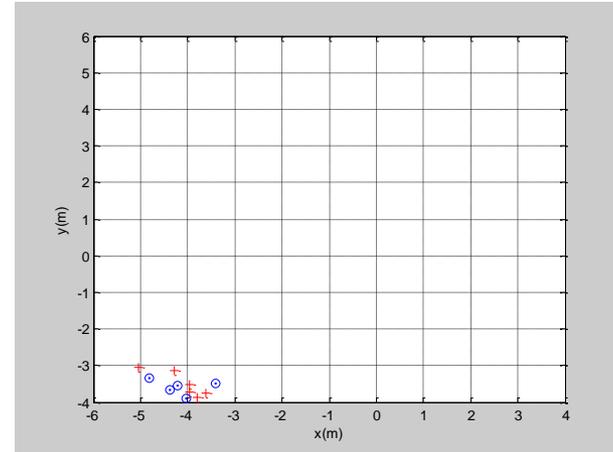
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

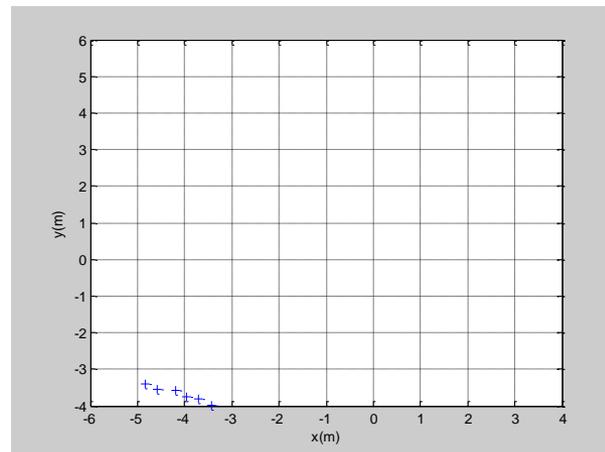
Target disappearance



Clean trajectories



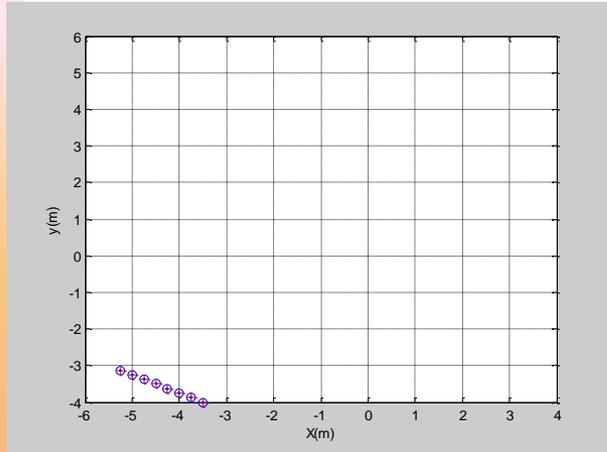
Noisy trajectories



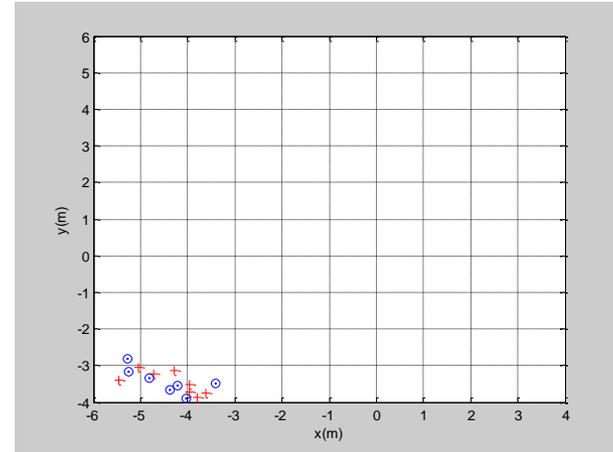
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

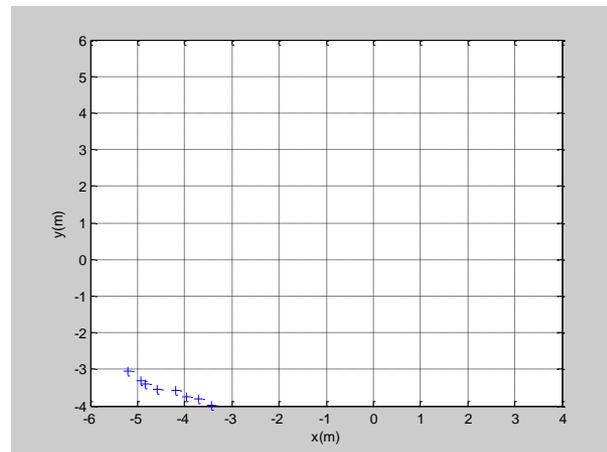
Target disappearance



Clean trajectories



Noisy trajectories

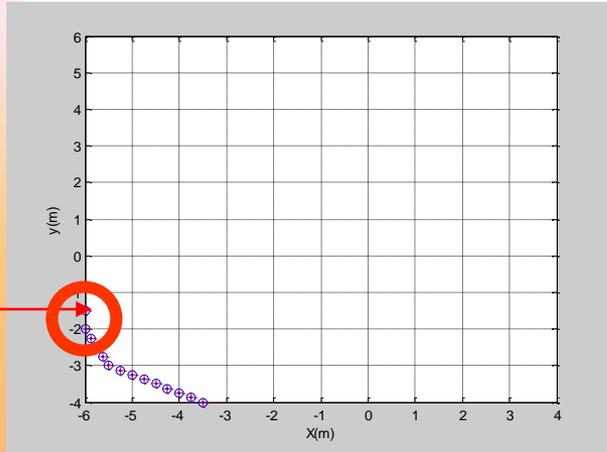


Estimated trajectories

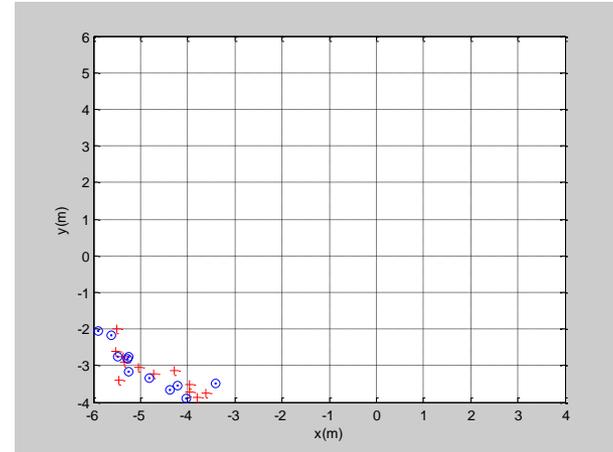
Suivi multi-objets

Target disappearance

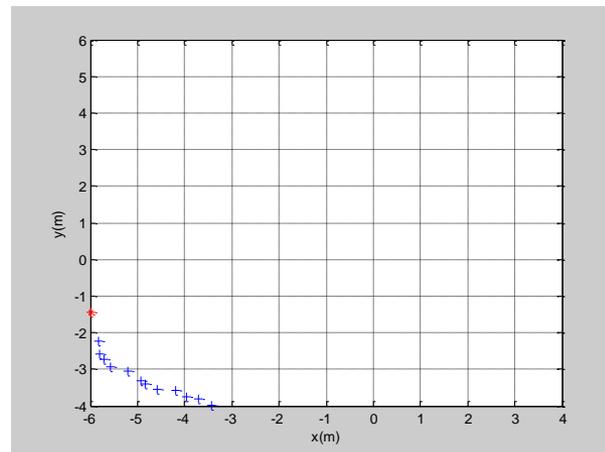
Target 2



Clean trajectories



Noisy trajectories

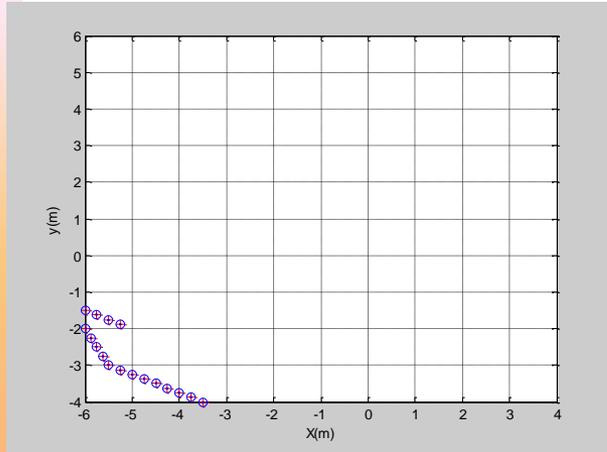


Estimated trajectories

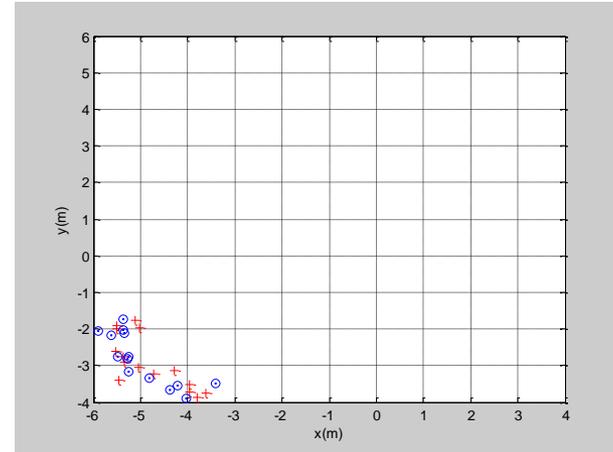
Approche
crédibiliste

Suivi multi-objets

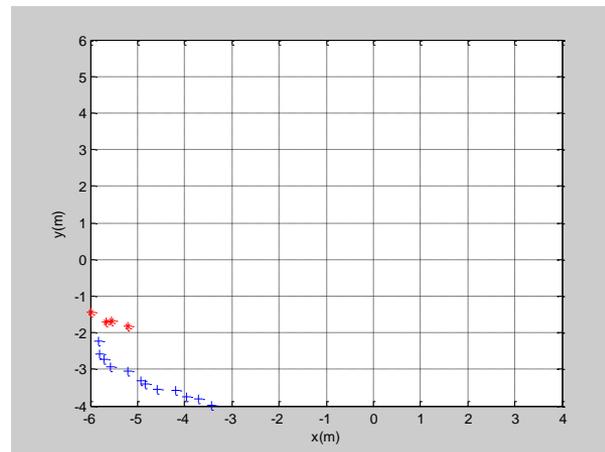
Target disappearance



Clean trajectories



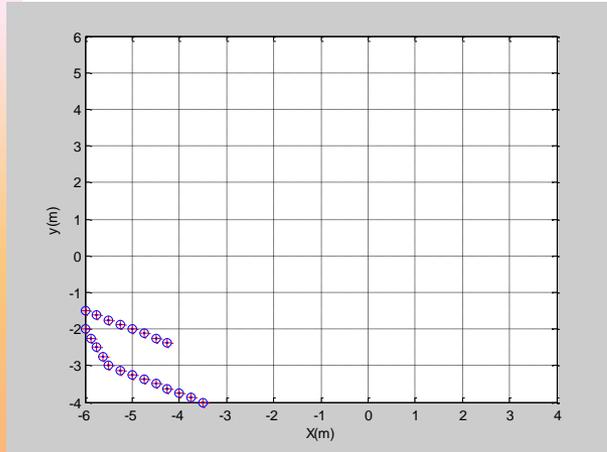
Noisy trajectories



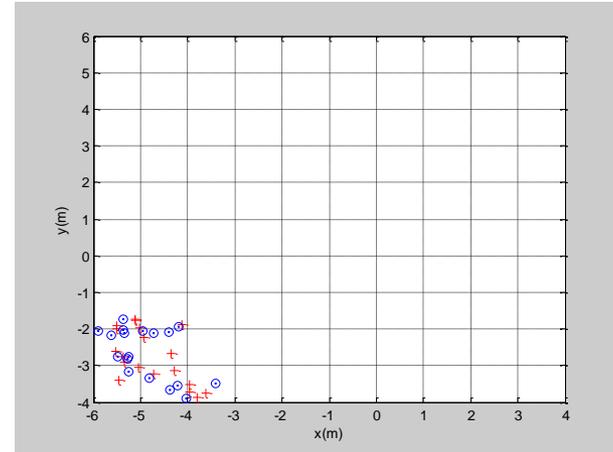
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

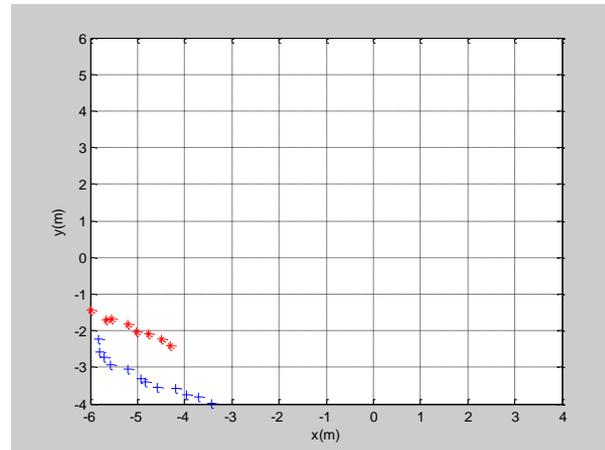
Target disappearance



Clean trajectories



Noisy trajectories

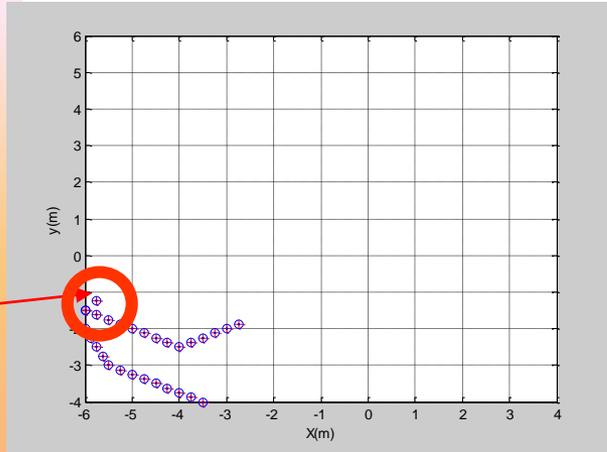


Estimated trajectories

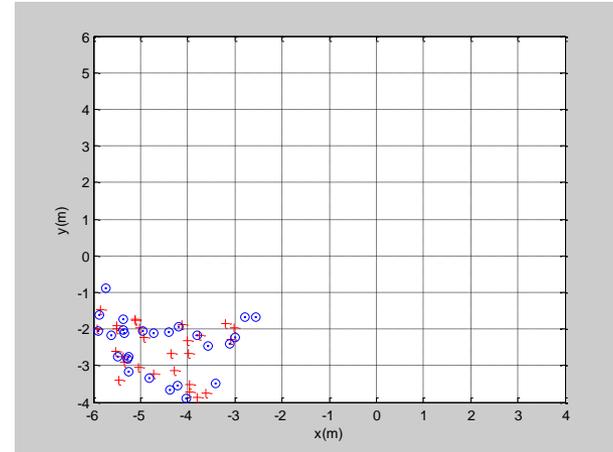
Suivi multi-objets

Target disappearance

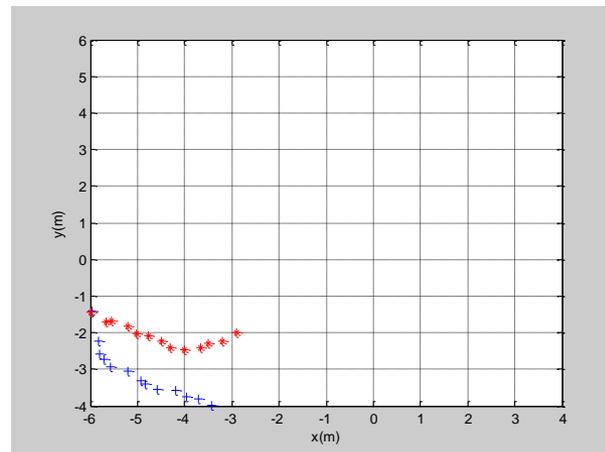
Target 1



Clean trajectories



Noisy trajectories

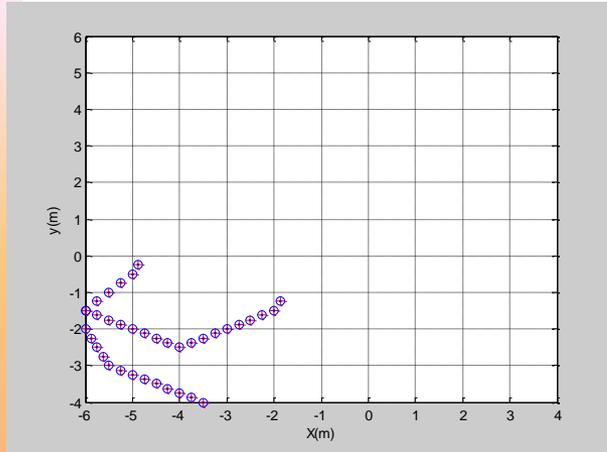


Estimated trajectories

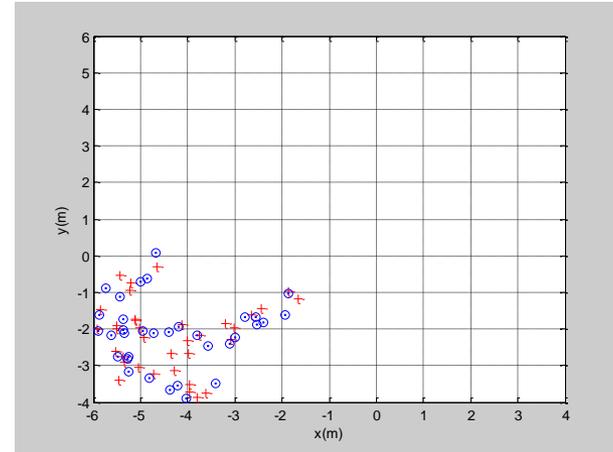
*Approche
crédibiliste*

Suivi multi-objets

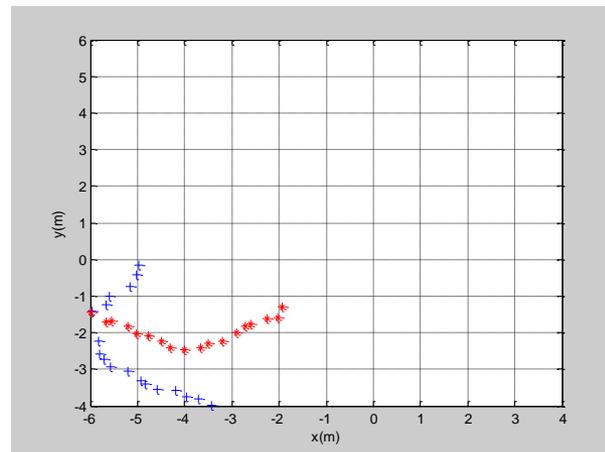
Target disappearance



Clean trajectories



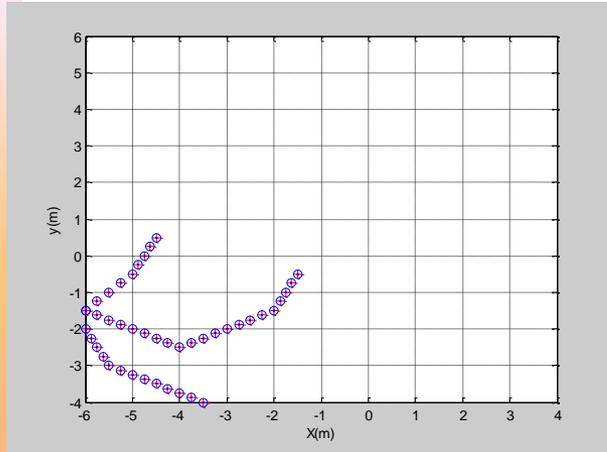
Noisy trajectories



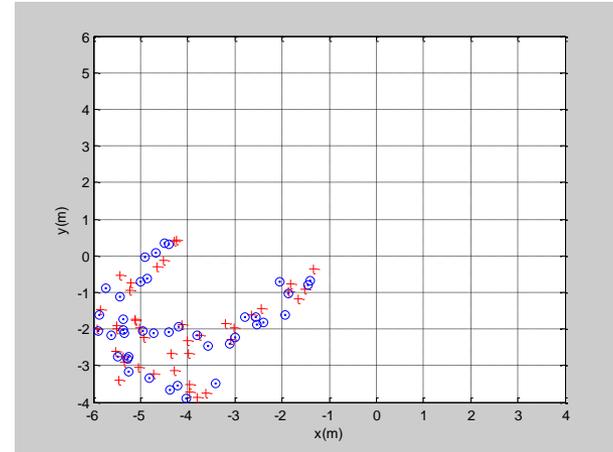
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

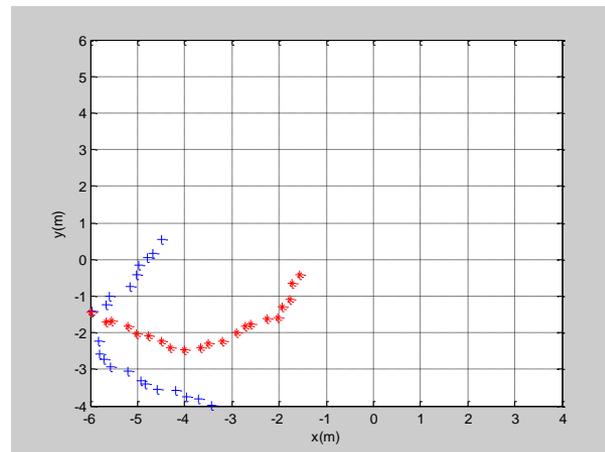
Target disappearance



Clean trajectories



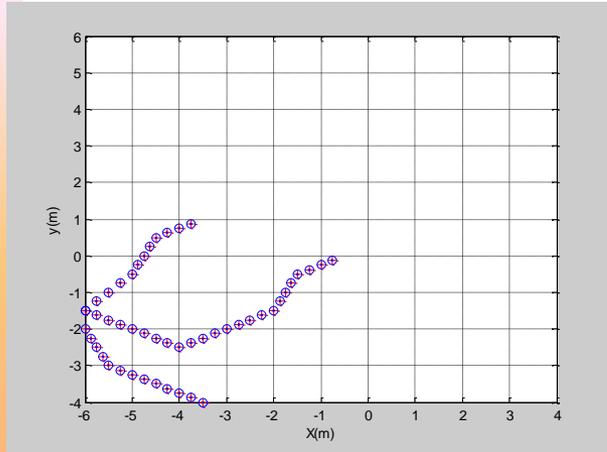
Noisy trajectories



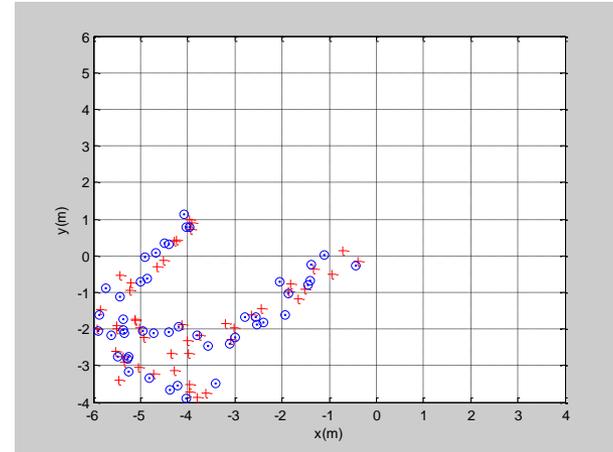
Estimated trajectories

Suivi multi-objets

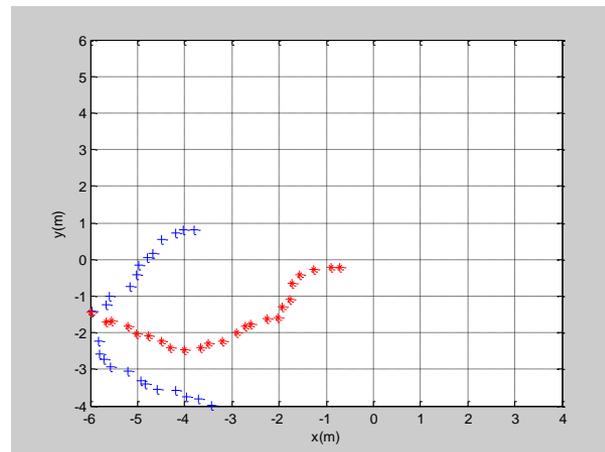
Target disappearance



Clean trajectories



Noisy trajectories



Estimated trajectories

Conclusion

- Formalisme récent de plus en plus utilisé
- Extension au continu récente
- Méconnaissance bien modélisée
- Conflit modélisé
- Quelques opérateurs de fusion (conjonctif, disjonctif; autres)
- Séparation des niveaux crédal et pignistique (MCT)

This is the end of this part!

