

1. Introduction

2. Espace Fondamental et Evènements

2.1 Définition

2.2 Evènements Remarquables

2.3 Opération sur les Evènements

2.4 Système Complet d'Evènements

3. Probabilités

3.1 Définitions

3.2 Propriétés des Probabilités

3.3 Indépendance Statistique

4. Probabilités Conditionnelles

4.1 Définition

4.2 Probabilités Composées

4.3 Probabilités Totales

4.4 Le Théorème de Bayes

Probabilités

1. Introduction

Les premières personnes à s'être intéressées aux problèmes des **probabilités** furent des mathématiciens français, **Blaise Pascal** et **Pierre de Fermat** qui répondaient aux questions soulevées par un adepte des jeux de **hasard**, le **chevalier de Méré**. A cette époque, la théorie des probabilités se développa uniquement en relation avec les jeux de hasard. Mais avec **Pierre Simon Laplace** et **Karl Friedrich Gauss**, les bases de la théorie furent étendues à d'autres applications et phénomènes.

Le calcul des probabilités fournit une modélisation efficace des situations non **déterministes** c'est-à-dire des phénomènes **aléatoires ou stochastiques**. En ce qui concerne les premiers, le résultat d'une expérience suit une loi rigoureuse connue (taux de croissance d'une population bactérienne). On peut donc ainsi prévoir le résultat pour un événement donné. En revanche dans le cas des phénomènes aléatoires, le résultat de l'expérience n'est pas connu avec certitude mais fluctue autour d'un résultat moyen qui est régi par une loi (transmission des caractères selon la loi de Mendel).

Il existe deux manières d'introduire la notion de probabilité :

- La probabilité *a priori*, « **subjective** » d'un événement est un nombre qui caractérise la croyance que l'on a que cet événement est réalisé avec plus ou moins de certitude avant l'exécution de l'expérience : l'événement est réalisé (probabilité 1) et l'événement n'est pas réalisé (probabilité 0).
- La probabilité *empirique* **assimilée à une fréquence** est définie à partir d'expériences indéfiniment renouvelables. La probabilité d'un événement est alors la fréquence d'apparition de cet événement.

2. Espace Fondamental et Evènements

2.1. Définition

En face de situations dont **l'issue est incertaine**, on a bien souvent envie d'attribuer à chacune des éventualités possibles une vraisemblance plus ou moins grande. Afin de donner une rigueur mathématique à ce concept, il est nécessaire tout d'abord de donner quelques définitions.

- Une expérience ou une épreuve est qualifiée d'**aléatoire** si on ne peut pas prévoir son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des résultats différents.
- Le résultat d'une expérience noté ω constitue une **éventualité** ou un **événement élémentaire**.
- l'ensemble des évènements élémentaires possibles pour une expérience aléatoire donnée constitue l'**espace fondamental** appelé **univers** ou **univers des possibles** noté Ω .

Un **événement** quelconque A est un ensemble d'évènements élémentaires et constitue **une partie de l'univers** des possibles Ω dont on sait dire à l'issue de l'épreuve s'il est réalisé ou non.

Si $\omega \in A$, alors **A est réalisé**. Mais si $\omega \notin A$ alors **A n'est pas réalisé** et c'est \bar{A} , l'**événement contraire** qui est réalisé. Un événement est donc une assertion relative aux résultats d'une expérience.

Il est possible qu'un événement ne soit constitué que **d'un seul** événement élémentaire. Les évènements sont représentés par des lettres majuscules, A, B, C, A_1, A_2 , etc.

Exemple :

Lors d'un contrôle sanguin, l'ensemble des résultats possibles si l'on s'intéresse

(1) au groupe sanguin et au facteur rhésus d'un individu est

$$\Omega = \{ A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O- \}$$

(2) au nombre de globules blancs $\Omega = \mathbb{N}^* = \{ 1, 2, \dots, n, \dots \}$

(3) au taux de glycémie $\Omega = [0 ; 15]$ au-delà de 15, l'individu n'est plus en état de subir une prise de sang.

Ainsi pour une même épreuve, l'univers Ω peut être **fini** (toutes les éventualités sont connues : cas 1) ou **infini** (toutes les éventualités ne sont pas connues : cas 2 et 3). Dans ces deux derniers cas, l'univers peut être **dénombrable** si on peut numéroter les éventualités connues (cas 2) ou bien **continu** comme dans le cas du taux de glycémie (cas 3).

- l'événement A « l'individu est de rhésus positif » est représenté par :

$$A = \{ A+, B+, AB+, O+ \} \quad \text{avec } A \subset \Omega$$

- l'événement B « l'individu est donneur universel » est représenté par :

$$B = \{ O- \} \text{ un seul événement élémentaire}$$

Dans le cadre de cet exemple, l'événement A est réalisé si le résultat du typage donne l'un des 4 groupes sanguins $A+, B+, AB+, O+$.

Si Ω est fini, chaque partie A de l'univers Ω ($A \subset \Omega$) est constituée d'un nombre fini d'éventualités et dans ce cas l'ensemble des évènements est tel que :

$$\varepsilon(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega) \quad \text{l'univers des possibles}$$

Dans le cadre de ce cours, nous nous placerons dans le cas où l'ensemble des évènements de l'univers Ω est clairement défini.

2. Espace Fondamental et Evènements

2.2. Evènements Remarquables

L'évènement **impossible** noté \emptyset est l'évènement qui **ne peut être réalisé** quelle que soit l'issue de l'épreuve. Bien que constitué d'aucune éventualité, \emptyset est considéré comme un évènement :

$$\emptyset \in \mathcal{E}(\Omega)$$

L'évènement **certain**, noté Ω **est toujours réalisé** quelle que soit l'issue de l'épreuve. Il est constitué de toutes les éventualités et l'on impose que ce soit un évènement :

$$\Omega \in \mathcal{E}(\Omega)$$

L'évènement **contraire** ou complémentaire d'un évènement A , noté $\mathcal{C}A$ ou \bar{A} **est l'évènement qui est réalisé si et seulement si A ne l'est pas**. Il est donc constitué des évènements élémentaires ω qui ne sont pas dans A .

$$\omega \in \bar{A} \Leftrightarrow \omega \notin A$$

Le complémentaire $\mathcal{C}A$ ou \bar{A} correspond à la **négation** logique **non $\neg A$** .

Exemple :

Dans l'exemple concernant les groupes sanguins, l'évènement contraire de A « l'individu est de rhésus positif » est constitué des évènements élémentaires suivant :

$$\bar{A} = \{A-, B-, AB-, O-\}$$

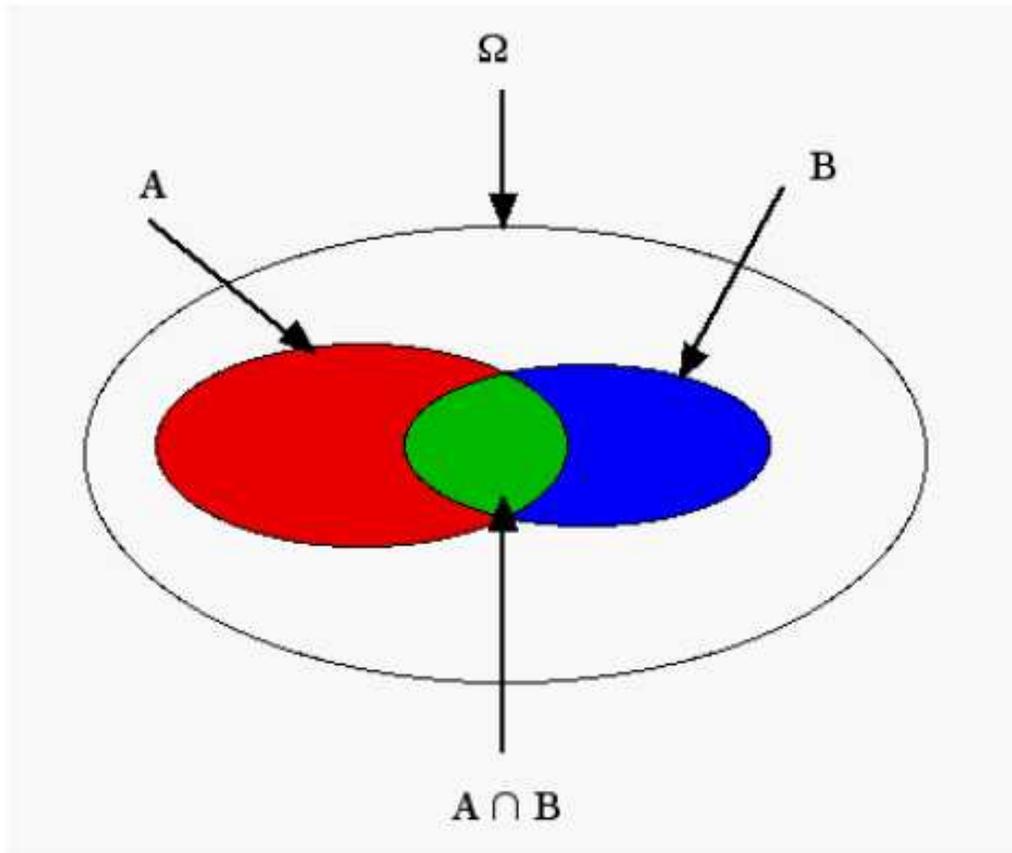
Par définition, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{array}{l} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \begin{array}{l} \bar{\bar{A}} = A \\ \bar{\emptyset} = \Omega \\ \bar{\Omega} = \emptyset \end{array}$$

On appelle **intersection** de deux évènements A et B , l'évènement qui est réalisé si et seulement si A **et** B le sont. Il est donc constitué des éventualités appartenant à la fois à **A et B** .

C'est un évènement noté **$A \cap B$** tel que : $\forall A, B \in \mathcal{E}(\Omega), A \cap B \in \mathcal{E}(\Omega)$
avec $\omega \in A \cap B \Leftrightarrow (\omega \in A \text{ et } \omega \in B)$

L'intersection **$A \cap B$** correspond à la *conjonction* logique « **A et B** ».



Remarque : L'univers des possibles Ω n'étant pas limité uniquement aux évènements A (parties **rouge** et **verte**) et B (parties **bleu** et **verte**), l'évènement complémentaire \bar{A} , est formé des parties **bleu** et blanche.

Exemple :

Dans l'exemple concernant les groupes sanguins, si à l'évènement A « l'individu est de rhésus positif », on ajoute l'évènement B « l'individu possède l'allèle B », l'intersection de ces deux évènements donne : $A \cap B = \{B+, AB+\}$

Deux évènements A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**, s'ils ne peuvent être réalisés simultanément. On a alors : $A \cap B = \emptyset$

Quelques propriétés de l'intersection (\cap) :

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

évènements incompatibles

$$\Omega \cap A = A$$

élément neutre (Ω)

$$\emptyset \cap A = \emptyset$$

élément absorbant (\emptyset)

$$A \cap B = B \cap A$$

commutativité

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

associativité

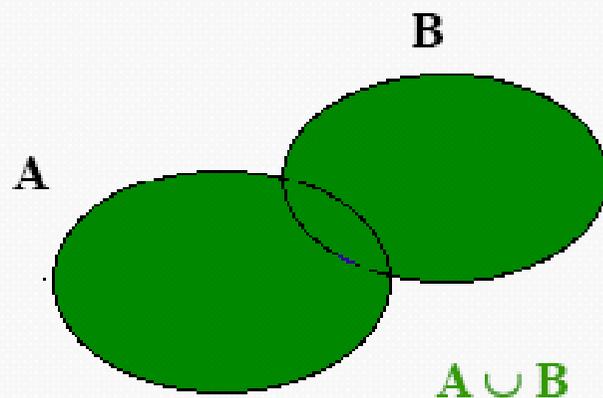
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

distributivité avec la **réunion** (\cup)

On appelle **réunion** de deux évènements A et B , l'évènement qui est réalisé si et seulement si A **ou** B est réalisé. Il est donc constitué des éventualités appartenant à A **ou** B .

C'est un évènement noté $A \cup B$ tel que : $\forall A, B \in \mathcal{E}(\Omega), A \cup B \in \mathcal{E}(\Omega)$
avec $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow (\omega \in A \text{ ou } \omega \in B)$

La réunion $A \cup B$ correspond à la *disjonction* logique « A **ou** B ».



La **réunion** des deux évènements A et B figure en **vert** sur le graphe ci-contre.

Remarque : La **réunion** de deux évènements n'est pas la somme algébrique des évènements dans la mesure où la zone de recouvrement n'est pas comptabilisée deux fois.

Exemple :

Dans l'exemple concernant les groupes sanguins, si à l'évènement A « l'individu est de rhésus positif », on ajoute l'évènement B « l'individu possède l'allèle B », la réunion de ces deux évènements donne :

$$A \cup B = \{A+, B+, B-, AB+, AB-, O+\}$$

Quelques propriétés de la réunion (\cup) :

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

évènements complémentaires

$$\emptyset \cup A = A$$

élément neutre (\emptyset)

$$\Omega \cup A = \Omega$$

élément absorbant (Ω)

$$A \cup B = B \cup A$$

commutativité

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

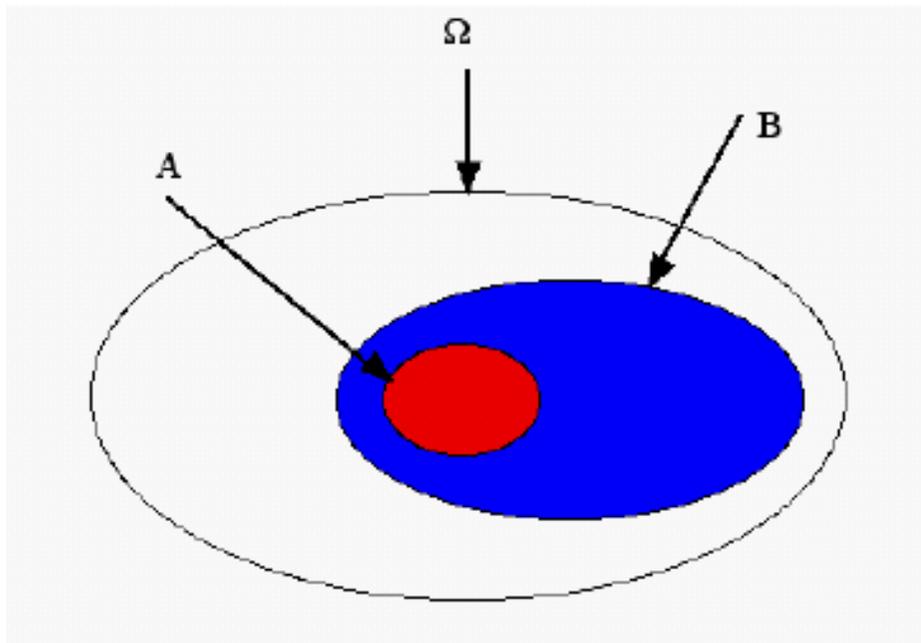
associativité

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

distributivité avec l'**intersection** (\cap)

Un événement A entraîne un événement B si la réalisation de A implique celle de B . On dit que l'événement A est **inclus** dans l'événement B .

$$A \subset B$$



L'*implication* logique « $A \Rightarrow B$ » se traduit par l'inclusion $A \subset B$.

Exemple de **l'inclusion** de l'événement A en **rouge** dans l'événement B en **bleu**.

Exemple :

Soit une urne contenant des billes rouges unies et des billes vertes unies et striées. Si l'on note A l'événement « obtention d'une bille striée » et B l'événement « obtention d'une bille verte », la réalisation de A implique la réalisation de B car A est inclus dans B .

A_1, A_2, \dots, A_n forment un système complet d'évènements si les **parties** A_1, A_2, \dots, A_n de Ω constituent une **partition** de Ω telle que :

$$\begin{aligned}\forall i \quad A_i &\neq \emptyset \\ \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j &= \emptyset \\ \bigcup_i A_i &= \Omega\end{aligned}$$

Un **système complet d'évènements** est formé de toutes les parties de Ω , c'est-à-dire des familles d'évènements **2 à 2 incompatibles** dont la réunion constitue l'évènement certain Ω .

Le nombre de partitions possibles dans un ensemble fini de n évènements est :

$$\text{si Card}(\Omega) = n \quad \text{alors} \quad \text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$$

3. Probabilités

3.1. Définitions

On appelle **probabilité** P toute **application** de l'ensemble des évènements Ω dans l'intervalle $[0,1]$, tel que :

$$P : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto P(A)$$

satisfaisant les propriétés (ou axiomes) suivantes

$$(P_1) \quad \forall A \in \mathcal{E}(\Omega) \quad P(A) \geq 0$$

$$(P_2) \quad P(\Omega) = 1$$

$$(P_3) \quad \forall A, B \in \mathcal{E}(\Omega) \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \quad \text{alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Remarque : Le concept mathématique de **probabilité** modélise les notions intuitives de **proportion** et de **fréquence**. Si l'on avance que la probabilité d'être immunisé contre la tuberculose est de 0,8, on modélise le fait qu'environ 80 % de la population est immunisé contre la tuberculose.

3. Probabilités

3.1. Définitions

Probabilités combinatoires

Soit Ω un espace fondamental fini constitué de N événements élémentaires sur lequel on fait l'hypothèse d'équiprobabilité de réalisation des N événements élémentaires. On suppose ainsi que tous les événements élémentaires ont « la même chance » de se réaliser. Dans ce cas la probabilité p_i d'un événement élémentaire quelconque ω_I est telle que :

$$p_i = \frac{1}{N} \text{ avec } p_i = P(\omega_I)$$

satisfaisant $\left\| \begin{array}{l} (P_1) \quad \text{avec } \forall I \quad p_i \geq 0 \\ (P_2) \quad \sum_i p_i = 1 \end{array} \right.$

Soit A un événement quelconque constitué de k **événements élémentaires** de Ω , on en

déduit :
$$P(A) = \frac{k}{N} \text{ avec } P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Cette formule s'énonce souvent comme :

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemples :

(1) En tapant 5 lettres au hasard sur une machine à écrire (possibilité de taper plusieurs fois sur la même touche), la probabilité d'obtenir le mot « lutte » est d'**une chance sur 12 millions**. En effet il y a exactement 11 881 376 mots de 5 lettres possibles (Voir Arrangement avec répétition).

(2) La probabilité d'obtenir un multiple de trois lors du lancé d'un dé à 6 faces, non pipé est :
 $A = \{3,6\}$ d'où $P(A) = 2/6 = \mathbf{1/3}$ avec $k=2$ et $p_i = 1/6$

3. Probabilités

3.1. Définitions

Si l'on répète N fois une expérience dans laquelle la probabilité d'apparition d'un événement A est P , **la fréquence** de cet événement au cours des N expériences, $\frac{k}{N}$ tend vers P lorsque N tend vers l'infini.

$$N \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{k}{N} \rightarrow P$$

Lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment, les fréquences observées tendent vers les probabilités et les distributions observées vers **les lois de probabilité**.

Exemple :

Lors d'un croisement entre plantes hétérozygotes Aa pour un caractère à dominance stricte (allèle A , forme sauvage et allèle a , forme mutée), on examine successivement deux **échantillons** de plantes résultant de ce croisement.

	N=40 fleurs		N=1000 fleurs		Probabilités attendues
	Effectifs	Fréquences	Effectifs	Fréquences	
Phénotype sauvage	29	0,725	754	0,754	0,750
Phénotype mutant	11	0,275	246	0,246	0,25

Nous définirons un **espace probabilisé** en utilisant l'axiomatique de Kolmogorov,

Définition 1 :

On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{C}) une application P de \mathcal{C} dans l'intervalle $[0,1]$ telle que :

- $P(\Omega)=1$
- pour tout ensemble dénombrable d'évènements incompatibles 2 à 2, on a :

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Définition 2 :

On appelle **espace probabilisé**, le triplet (Ω, \mathcal{C}, P)

Ainsi un espace probabilisé désigne un espace fondamental et ses évènements, muni d'une mesure de probabilités.

Additivité• **Cas d'évènements incompatibles**

Si $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ sont n évènements **incompatibles deux à deux**

($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) alors : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_n) =$

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_i) + \dots + P(A_n)$$

La probabilité de la **réunion** d'un ensemble fini ou dénombrable d'évènements

2 à 2 incompatibles est égale à la somme de leur probabilité d'où :

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

3. Probabilités

3.2. Propriétés des Probabilités

Additivité

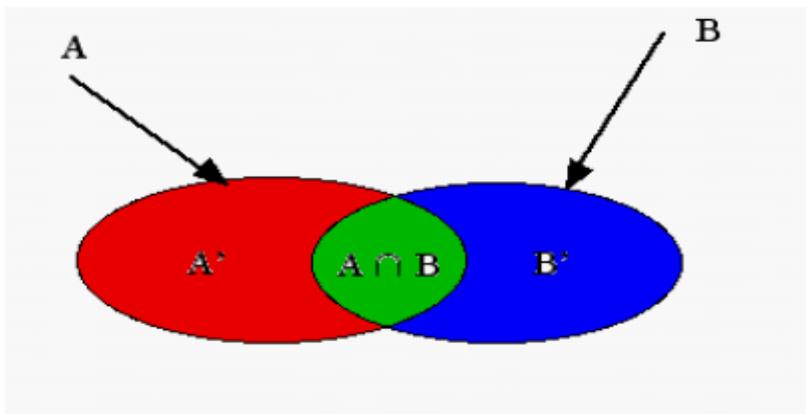
• Cas de deux évènements quelconques

Si A et B sont deux **évènements quelconques**, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Voici pourquoi :

A et B étant deux évènements quelconques, $(A \cap B) \neq \emptyset$, ces évènements peuvent se décomposer comme la réunion de deux évènements incompatibles :



Alors :

1. $A = A' \cup (A \cap B)$ avec $A' \cap (A \cap B) = \emptyset$

alors $P(A) = P(A') + P(A \cap B)$

et $P(A') = P(A) - P(A \cap B)$

2. $B = B' \cup (A \cap B)$ avec $B' \cap (A \cap B) = \emptyset$

d'où $P(B') = P(B) - P(A \cap B)$

3. $P(A \cup B) = P(A') + P(A \cap B) + P(B')$

d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Evènement contraire

Si A est un évènement quelconque, alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Voici pourquoi :

Nous avons vu précédemment que

$$A \cup \bar{A} = \Omega \text{ et } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\text{d'où } P(\Omega) = 1 = P(A) + P(\bar{A}) \text{ ainsi } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Propriétés de la **réunion** et de l'**intersection**

Propriétés d'additivité des probabilités

Evènement impossible

$$P(\emptyset) = 0$$

Voici pourquoi :

Nous avons vu précédemment que

$$\emptyset \cup \Omega = \Omega \quad \text{élément neutre}$$

$$P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) \quad \text{Propriétés d'additivité des probabilités}$$

$$\text{d'où } P(\Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) \quad \text{ainsi } P(\emptyset) = 0$$

Inclusion

$$\text{Si } A \subset B \text{ alors } P(A) \leq P(B)$$

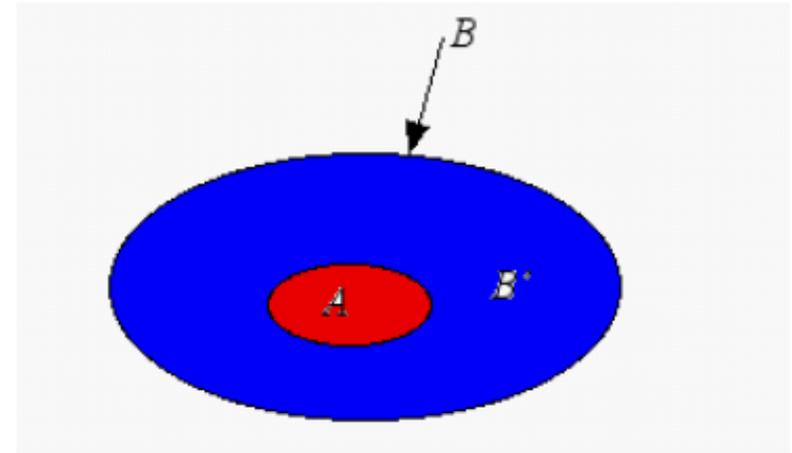
Voici pourquoi :

si $B = B' \cup A$ avec $B' \cap A = \emptyset$

alors $P(B) = P(B' \cup A) = P(B') + P(A)$

d'où $P(A) \leq P(B)$

avec $P(A) = P(B)$ lorsque $P(B') = 0$



3. Probabilités

3.3. Indépendance Statistique

L'hypothèse d'**indépendance** entre évènements et plus généralement entre épreuves successives est un préalable lors de l'établissement des lois de probabilités

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si l'on a :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Ainsi si A et B sont deux évènements **statistiquement indépendants**, la probabilité de la réalisation conjointe de ces deux évènements est le produit de leur probabilité respective.

Remarque : Il ne faut pas confondre évènements **indépendants** et évènements **incompatibles**.

Supposons A et B à la fois indépendants et incompatibles. On a alors :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{indépendants}$$

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \quad \text{incompatibles}$$

d'où nécessairement $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$

Les propriétés associées à l'indépendance sont :

(1) si A est un évènement **quelconque**,

A et Ω sont indépendants : $A \cap \Omega = A$ **élément neutre**

$$P(A \cap \Omega) = P(A)P(\Omega) = P(A) \quad \text{car } P(\Omega) = 1$$

A et \emptyset sont indépendants : $A \cap \emptyset = \emptyset$ **élément absorbant**

$$P(A \cap \emptyset) = P(A)P(\emptyset) = P(\emptyset) \quad \text{car } P(\emptyset) = 0$$

(2) si A et B sont deux évènements **quelconques**,

A et B sont indépendants si et seulement si A et \bar{B} (\bar{A} et B) ou sont indépendants (**démonstration**).

A et B sont indépendants si et seulement si \bar{A} et \bar{B} le sont.

Généralisation à n évènements

n évènements ($n \geq 2$), $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ sont dit **indépendants** dans leur ensemble (ou mutuellement indépendants) si on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_i) \times \dots \times P(A_n)$$

$$P\left(\bigcap_i A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

4. Probabilités Conditionnelles

4.1. Définition

Soit deux évènements A et B d'un espace probabilisé Ω avec $P(B) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de l'évènement « A si B » (ou « A sachant B »), le quotient

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ notée } P_B(A)$$

On définit ainsi une probabilité sur Ω au sens de la définition donnée précédemment.

Théorème :

Soit B un évènement de probabilité non nulle, alors :

$$P_B : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ est une probabilité sur } \Omega$$

4. Probabilités Conditionnelles

4.1. Définition

Remarque : La probabilité $P(A)$ est appelée la probabilité *a priori* et $P(A / B)$ ou $P_B (A)$ la probabilité *a posteriori* car sa réalisation dépend de la réalisation de B .

On observe les relations suivantes :

$$\begin{cases} P(A / A)=1 \\ \text{Si } B \subset A, \text{ alors } A \cap B = B \text{ et donc } P(B / A) = \frac{P(B)}{P(A)} \end{cases}$$

Exemple :

Soit un croisement entre hétérozygotes Aa pour un caractère à dominance stricte, quelle est la probabilité d'obtenir à la génération suivante parmi les individus de phénotype A , un individu homozygote ?

L'ensemble des événements élémentaires est : $\Omega = \{AA, Aa, aA, aa\}$

Si h = homozygote et \bar{h} = hétérozygote

$$P(h / A) = \frac{P(h \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \mathbf{1/3} \quad \text{probabilité } \mathbf{a posteriori}$$

La probabilité *a priori* d'obtenir un homozygote est $1/4$.

Théorème :

Soit deux évènements A et B d'un espace probabilisé Ω . Alors,

$$P(A \cap B) = P(B / A) P(A) = P(A / B) P(B) \quad \text{Formule des probabilités composées}$$

Voici pourquoi :

Par définition, $P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ d'où $P(A \cap B) = P(A / B) P(B)$

Si A et B sont deux évènements **indépendants** et que $P(B) \neq 0$ alors ceci équivaut à affirmer que

$$P_B(A) = P(A / B) = P(A).$$

Lorsque deux évènements sont **indépendants**, le fait que l'un des évènements soit réalisé, n'apporte aucune information sur la réalisation de l'autre. Dans ce cas la probabilité conditionnelle $P_B(A)$ (*a posteriori*) est égale à la probabilité $P(A)$ (*a priori*).

Voici pourquoi :

La formule des probabilités composées donne $P(A \cap B) = P(A / B) P(B)$.

L'indépendance statistique entre A et B équivaut à $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

d'où la relation

$$P(A / B) = P(A)$$

Théorème :

Si $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$ est un système complet d'évènements , quel que soit l'évènement B , alors :

$$P(B) = P(B / A_1)P(A_1) + P(B / A_2)P(A_2) + \dots + P(B / A_n)P(A_n)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B / A_i)P(A_i) \quad \text{Formule des probabilités totales}$$

Exemple :

Une population animale comporte 1/3 de mâles et 2/3 de femelles. L'albinisme frappe 6 % des mâles et 0,36 % des femelles. La probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos est :

Si $A = \{\text{mâle}\}$ et $\bar{A} = \{\text{femelle}\}$ constitue un système complet d'évènements

$B = \{\text{albinos}\}$ et $\bar{B} = \{\text{non albinos}\}$

sachant que $P(B) = P(B / A)P(A) + P(B / \bar{A})P(\bar{A})$

alors $P(B) = (0,06 \times 1/3) + (0,0036 \times 2/3) = \mathbf{0,0224}$
soit **2,24% d'albinos** dans cette population.

Théorème :

Si $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$ est un ystème complet d'évènements, et quel que soit l'évènement B tel que $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i)P(A_i)}{P(B / A_1)P(A_1) + \dots + P(B / A_i)P(A_i) + \dots + P(B / A_n)P(A_n)}$$

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B / A_i)P(A_i)}$$

Formule de Bayes

Remarque : La formule de Bayes est utilisée de façon classique pour calculer des **probabilités de causes** dans des diagnostics (maladies, pannes, etc.). L'application du théorème de Bayes est à la base de toute une branche de la statistique appelée statistique bayésienne.

Exemple :

Dans une population pour laquelle 1 habitant sur 100 est atteint d'une maladie génétique A, on a mis au point un test de dépistage. Le résultat du test est soit positif (T) soit négatif (\bar{T}).

On sait que : $P(T / A) = 0,8$ et $P(\bar{T} / \bar{A}) = 0,9$

On soumet un patient au test. Celui-ci est positif. Quelle est la probabilité que ce patient soit atteint de la maladie A soit $P_T(A)$ ou $P(A/T)$?

D'après la formule de Bayes :

$$P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T/A)P(A)}{P(T/A)P(A) + P(T/\bar{A})P(\bar{A})}$$

$$\text{d'où } P(A/T) = \frac{0,01 \times 0,8}{0,8 \times 0,01 + 0,1 \times 0,99} = \mathbf{0,075}$$

Ainsi **avant le test**, la probabilité d'**être malade** était de $P(A) = \mathbf{0,01}$ (probabilité *a priori*)

et **après le test** la probabilité d'**être malade** est de $P(A/T) = \mathbf{0,075}$ (probabilité *a posteriori*)

Ainsi le test apporte un supplément d'information.